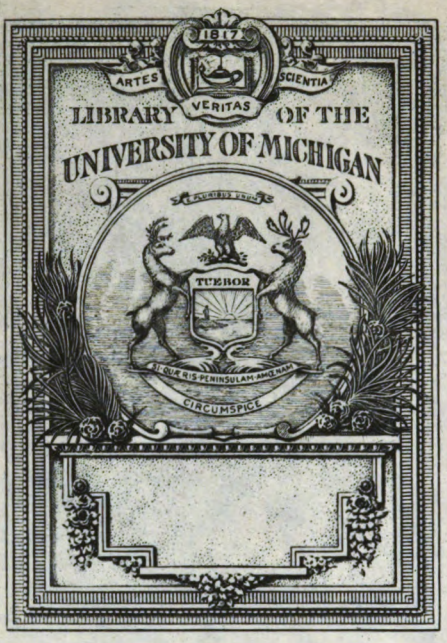


Digitized by Google

Math Lib
QA
691
.S376

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
.S376

Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

„Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Ende 1901:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 3.—.

„ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes I: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg. Mk. 9.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mh. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. Mk. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.

„ XL: **Mathematische Optik** von Dr. J. Classen in Hamburg. Mk. 6.—.

Wenden!

Digitized by Google

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Niedere Analysis von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg.

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Mathematische Geographie von Dr Ernst Hartwig in Bamberg.

Anwendungen der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg.

Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.

Dynamik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Technische Mechanik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Geodäsie von Dr. F. B. Messerschmidt in Hamburg.

Allgemeine Funktionentheorie von Dr Paul Epstein in Strassburg.

Räumliche projektive Geometrie.

Geometrische Transformationen von Dr. Karl Doehlemann in München.

Theorie der höheren algebraischen Kurven.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Elliptische Funktionen von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

Hyperelliptische und Abelsche Funktionen von E. Landfried in Strassburg.

Theorie und Praxis der Reihen von Prof. C. Runge in Hannover.

Invariantentheorie von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

Liniengeometrie von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.

Mehrdimensionale Geometrie von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Kinematik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.

Mechanische Wärmelehre von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.

Digitized by Google

Sammlung Schubert XXXV

Mehrdimensionale Geometrie

117757

von

Dr. P. H. Schoute
Professor der Mathematik an der Reichs-Universität zu Groningen (Holland)

Erster Teil

Die linearen Räume

Mit 65 Figuren und 335 Aufgaben

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1902

Digitized by Google

Alle Rechte vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort.

Als ich von Herrn Professor Dr. H. Schubert ersucht wurde, für seine Sammlung ein Lehrbuch über *mehrdimensionale Geometrie* zu verfassen, war es mir sofort klar, dafs es mir nur dann möglich sein würde, die Unmasse des Lehrstoffes zu bewältigen, wenn ich mich ganz auf die Euklidische Geometrie beschränkte und versuchte, innerhalb dieser Einschränkung etwas Brauchbares zu liefern. Was hier geboten wird, ist also der erste Teil einer *ausschliefslich* Euklidischen mehrdimensionalen Geometrie. Es erscheint mir angebracht, die Aufmerksamkeit von vorne herein auf diese Einschränkung zu lenken, damit jeder Mathematiker, nach dessen Meinung dieses Geständnis meiner Arbeit ihren eventuellen höheren Wert raubt, sie unmittelbar aus der Hand legen könne. Möglicherweise wird die Thatsache, dafs in diesem ersten Teile, welcher über lineare Räume handelt, sogar keine Kenntnis der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt wird, ebenso abschreckend wirken.

Es wendet dieses Buch sich in erster Linie an diejenigen Studierenden der Mathematik, denen die Betrachtungen der vieldimensionalen Geometrie bis jetzt fremd geblieben sind, obgleich sie sich die dazu notwendigen Vorkenntnisse (in der Planimetrie und Stereometrie, in der darstellenden und analytischen Geometrie, sowie in der Geometrie der Lage, u. s. w.) erworben haben, und welche nunmehr wünschen, sich systematisch in die n-dimensionale Geometrie einführen zu lassen. Die Bedürfnisse derartiger Studierenden sind es, die mir bei der Arbeit fortwährend vor Augen geschwebt haben. Ihnen die Fundamente herbeizuschaffen, auf welchen sie selbst entweder in analytischer oder in synthetischer Richtung weiter fortbauen können, war mein Hauptziel. Schon in diesem ersten Teile habe

Digitized by Google

ich an die vier theoretischen Abschnitte über Grundbegriffe, über Parallelismus, über Orthogonalität und über Abstand, Projektion und Winkel fünf Abschnitte angereiht, in welchen die Methoden der darstellenden und analytischen Geometrie, sowie jene der Geometrie der Lage, u. s. w. auf die linearen Räume des n-dimensionalen Gebietes ausgedehnt werden. Ferner habe ich mich bestrebt, die Lösung einer Reihe von mehrdimensionalen Problemen sowohl rechnerisch wie konstruktiv ganz durchzuführen und ihnen eine bedeutende Reihe von (bisweilen mit einigen Lösungsanweisungen versehenen) Übungsaufgaben anzuschliefsen, welche sich, selbstverständlich überwiegend, doch nicht ausschliefslich, auf den Raum von vier Dimensionen beziehen.

Es würde keinen Zweck haben, hier ängstlich zu erwähnen, welche Paragraphen als mein geistiges Eigentum zu betrachten sind. Lieber gestehe ich, dafs ich von der Behandlung mehrerer Unterabteilungen durch hauptsächlich italienische Schriftsteller viel gelernt habe. Insbesondere erwähne ich, dafs das Lesen der Inauguraldissertation von Dr. W. A. Wythoff aus Amsterdam auf die Form der ersten acht Paragraphen von Einfluſs gewesen ist, und ich diesem Landsmann einige goniometrische Entwickelungen über das vierdimensionale Vierkant verdanke.

Schliefslich liegt es mir ob, Herrn Dr. H. de Vries — früher Assistent der darstellenden Geometrie am Polytechnikum zu Zürich, jetzt Privatdozent der projektiven Geometrie an der Universität zu Amsterdam — für die Mühe zu danken, welche er sich gegeben hat, das Manuskript für die deutsche Sprache durchzusehen, und Herrn Professor Schubert meinen besten Dank zu zollen für die schöne Anregung, welche die Abfassung dieses Buches mir gewesen ist. In der Hoffnung, dafs es — ungeachtet der Mängel, die es zweifelsohne verunstalten — in weitem Kreise nützlich sein möge, übergebe ich es der Öffentlichkeit.

P. H. Schoute.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Teil I: Die linearen Räume.

Seite

§ 1. **Grundbegriffe.**

1. Linien, Flächen, Räume 1
2. Die drei Axiome der Gerade 2
3. Das Axiom der Ebene 3
4. Der lineare d-dimensionale Raum 4
5. Die Erzeugung des Raumes 4
6. Die Erzeugung von R_d 6
7. Umkehrung des allgemeinen Erzeugungssatzes 8
8. Bestimmung des Raumes R_d durch $d+1$ Punkte . . . 9
9. Andere Bestimmungsweisen 10
10. Die Dimensionensumme der Bestimmungsstücke 11
11. Die Punktwertsumme der Bestimmungsstücke 12
12. Zwei Räume R_w mit gemeinsamen Punkten 13
13. Bestimmung eines linearen Raumes durch zwei lineare Räume mit gemeinsamen Punkten 14
14. Verschiedenes Verhalten zweier linearer Räume 15
15. Drei und mehr lineare Räume mit gemeinsamen Punkten 16
16. Bestimmung eines linearen Raumes durch drei und mehr lineare Räume mit gemeinsamen Punkten 19

§ 2. **Parallelismus.**

17. Das Unendliche des Raumes R_d 20
18. Die perspektive Anschauung der unendlich fernen Elemente 23
19. Parallele Räume von gleicher Dimensionenzahl 24
20. Richtung und Stellung 26
21. Bestimmung des Raumes U_{d-1} durch d Punkte . . . 27
22. Das Cartesische Koordinatensystem 29
23. Die Ausdehnungslehre von Grafsmann 32
24. Parallele Räume verschiedener Dimensionenzahlen . . . 33
25. Teilweiser Parallelismus zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} . 33
26. Die allgemeine Gültigkeit der Formeln 5) bis 9) . . . 35
27. Kritischer Rückblick 37
28. Übersicht der Lageverhältnisse zweier linearer Gebilde in den verschiedenen Räumen 38

Digitized by Google

Seite

§ 3. **Orthogonalität.**

29. Der Hauptsatz der Orthogonalität 40
30. Erste Verallgemeinerung des Hauptsatzes 42
31. Die Orthogonalität eine Beziehung zwischen uneigentlichen Elementen. Zweite Verallgemeinerung des Hauptsatzes 42
32. Konstruktion des durch einen gegebenen Punkt gehenden zu einer gegebenen Gerade senkrechten Raumes R_{n-1} 44
33. Konstruktion des durch einen gegebenen Punkt gehenden zu einem gegebenen Raume R_d senkrechten Raumes R_{n-d} 45
34. Haupteigenschaft zweier einander senkrecht zugeordneter uneigentlicher Räume 45
35. Das rechtwinklige Koordinatensystem 46
36. Zu einander senkrechte Räume R_{d_1} und R_{d_2} ($d_1+d_2 \neq n$). Teilweise Orthogonalität 47
37. Orthogonalität kontra Parallelismus 51
38. Lageverhältnisse der Gebilde in den verschiedenen Räumen 52

§ 4. **Abstand, Projektion und Winkel.**

39. Stereometrischer Rückblick 53
40. Der Abstand zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} ohne gemeinschaftliche eigentliche Punkte 55
41. Die überhaupt möglichen Fälle von Abstandsbestimmung 57
42. Die Projektion einer Gerade auf einen Raum R_d . . 58
43. Die Projektion einer Ebene auf einen Raum R_d . . . 61
44. Die Projektion eines Raumes R_{d_1} auf einen Raum R_{d_2} 65
45. Definition des Winkelbegriffes 68
46. Die Winkel zweier Ebenen im R_4 69
47. Die uneigentliche Gerade der Ebene eines Neigungswinkels 74
48. Die Winkel zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} 77
49. Besondere Fälle 81
50. Die Winkel der zu R_{d_1} und R_{d_2} normalen Räume . . 82
51. Die Winkelabstände in uneigentlichen Räumen 83

§ 5. **Darstellende Geometrie.**

52. Projektionsachsen und Projektionsebenen 84
53. Die Darstellung des Punktes 87
54. Die Darstellung der Gerade 89
55. Die Lageverhältnisse der Gerade im R_4 89
56. Spurenbestimmung der Gerade 91
57. Zwei allgemeine Darstellungen der Ebene 93
58. Anwendung der zweiten Methode auf ein Problem im R_4 95
59. Dritte Darstellung der Ebene im R_4 99
60. Verschiedene Lagen der Ebene im R_4 100
61. Die Darstellung des Raumes 103
62. Verschiedene Raumprobleme im R_4 105
63. Orthogonalität und Abstand 111
64. Abstandsbestimmungen im R_4 112

Digitized by Google

Seite
65. Winkelbestimmungen im R_4 115
66. Transformation auf ein neues Achsensystem 118
67. Schiefe Parallelprojektion 121
68. Axonometrische Projektion, Perspektive 123

§ 6. **Analytische Geometrie.**
69. Der Abstand zweier Punkte 125
70. Die Achsenwinkel einer Gerade 127
71. Der Winkel zweier Geraden 129
72. Koordinatentransformation 130
73. Die Gerade 133
74. Die Ebene 135
75. Der Raum R_3 136
76. Der Raum R_{n-1} 137
77. Die Hesse'sche Normalform des Raumes R_{n-1} . . . 138
78. Lineare Kombination von Räumen R_{n-1} 140
79. Homogene Koordinaten 142
80. Die homogene Gleichung des Raumes R_{n-1} 144
81. Raumkoordinaten 146
82. Homogene Raumkoordinaten 148
83. Zusammenhang zwischen homogenen und nicht-homogenen Koordinaten 151
84. Transformation von homogenen Koordinaten 152
85. Überzählige Koordinaten 154
86. Determinanten und Matrixgleichungen 154
87. Schnittpunktbestimmung 157
88. Zusammenhang zwischen den alten und neuen Formeln 159
89. Bestimmung von gemeinsamen Elementen 161
90. Graphische Lösung eines Systems von linearen Gleichungen 167
91. Orthogonalität und Abstand 168
92. Erstes Beispiel 169
93. Zweites Beispiel 171
94. Winkelbestimmung 173
95. Beispiel 174
96. Bestimmung zweier Winkel 175

§ 7. **Geometrie der Lage.**
97. Das Prinzip der Dualität 180
98. Die Orthogonalitätsverwandtschaft 182
99. Die allgemeinste kollineare Verwandtschaft. Perspektivität 187
100. Erweiterung des Kollineationsbegriffes 189
101. Der allgemeine Satz der kollinearen Zuordnung . . . 192
102. Kollineare Systeme und incidente Räume 197
103. Einfachste analytische Darstellung incidenter Raumsysteme 201
104. Kollineare Verwandtschaft von konjektiven Räumen. Koincidenzpunkte 205
105. Affinität 209

Digitized by Google

Seite

106. Örter von Koincidenzpunkten 210
107. Gescharte und involutorisch gescharte Systeme . . . 214
108. Orthogonalitäts- und kollineare Verwandtschaft . . . 219
109. Positive und negative Kongruenz 221
110. Die Koincidenzpunkte kongruenter Systeme im R_3 . 224
111. Die Koincidenzpunkte kongruenter Systeme im R_n . 227
112. Anwendungen und Beispiele 230
113. Ähnlichkeit 234
114. Die allgemeinste Reciprocität 235
115. Incidenzelemente konjektiver reciproker Systeme. Involutorische Lage 237
116. Polarsysteme 239
117. Analytische Erzeugung des Nullsystems 242
118. Geometrische Erzeugung des Nullsystems 244
119. Durchmesserräume und Achse des Nullsystems . . . 246
120. Einfachste analytische Darstellung des Nullsystems . 247
121. Beweglichkeit des Nullsystems 250
122. Die Nullsysteme in der Mechanik 251

§ 8. **Geometrie der Anzahl.**

123. Die Konstantenzahlen von linearen Räumen 253
124. Einfache Anwendungen 255
125. Die imaginären linearen Räume 257
126. Die Konstantenzahlen von imaginären linearen Räumen 258
127. Die Konstantenzahlen von Bedingungen 260
128. Das Korrespondenzprinzip von Chasles und das Prinzip der Erhaltung der Anzahl von Schubert 262
129. Ein anzahlgeometrisches Problem 264

§ 9. **Polygonometrie.**

130. Das vierdimensionale Vierkant 267
131. Konstruktion der Raumwinkel des Vierkants 269
132. Berechnung der Winkel zwischen den gegenüberliegenden Elementen des Vierkants 273
133. Das n-dimensionale n-Kant 279
134. Anwendung der analytischen Geometrie auf das n-Kant 281

Anhang: Gemischte Aufgaben 287

Digitized by Google

Erster Teil.

Die linearen Räume.

§ 1. Grundbegriffe.

1. **Linien, Flächen, Räume.** Eine *Linie* ist die Gesamtheit aller Stellen, welche nach einander eingenommen werden von einem sich kontinuierlich, d. h. ohne Sprünge, bewegenden Punkte; sie ist ein Gebilde von einer einzigen Dimension.

Eine *Fläche* ist die Gesamtheit aller Linien, mit welchen eine sich kontinuierlich bewegende Linie nach einander zusammenfällt. Dabei ist es gleichgültig, ob die Linie, welche die Fläche erzeugt, sich mit oder ohne Formänderung bewegt; nur die Bewegung der Linie *in sich*, wobei die Punkte der Linie sich der Linie entlang bewegen, ist hier ausgeschlossen, weil die Linie als ganzes Gebilde sich dann nicht ändert und also eine Linie bleibt. Die Fläche ist ein Gebilde von zwei Dimensionen.

Ein *Raum* ist der Ort einer sich kontinuierlich bewegenden Fläche; er ist ein Gebilde von drei Dimensionen.

Es leuchtet ein, wie man auf diese Weise weitergehen kann, jedesmal ein neues Glied der Reihe „Punkt, Linie, Fläche, Raum, u. s. w." aus dem vorhergehenden ableitend. So erscheint im allgemeinen das Raumgebilde von d Dimensionen als der Ort eines sich kontinuierlich bewegenden Raumgebildes von $d-1$ Dimensionen, was offenbar voraussetzt, dafs bei keiner dieser die Zahl der Dimensionen um die Einheit steigernden Operationen der für diese entweder mit oder ohne Deformation stattfindende Positionsänderung notwendige Bewegungsraum gefehlt habe. Schliefslich ist, wie wir sehen

Digitized by Google

werden, diese Voraussetzung die einzige, durch welche sich die mehrdimensionale Geometrie von der Stereometrie unterscheidet.

2. **Die drei Axiome der Gerade.** Durch zwei willkürlich gewählte Punkte geht immer eine Linie hindurch, welche die Eigenschaft besitzt, durch diese beiden Punkte eindeutig bestimmt zu sein (*erstes Axiom*).

Diese Linie heifst eine *Gerade*, alle anderen Linien nennt man *krumme Linien* oder *Kurven*.

Die Gerade ist *unendlich*, d. h. wenn sich ein Punkt der Gerade entlang bewegt, so hat man sich, falls die Gerade ganz durchlaufen werden soll, diese Bewegung als eine kontinuierliche, nirgends angefangene, nirgends aufhörende zu denken, ohne befürchten zu müssen, dafs der bewegende Punkt abermals an schon durchlaufenen Stellen vorüberkommt (*zweites Axiom*).

Dieses zweite Axiom unterscheidet die Euclidische Geometrie von den elliptischen Geometrieen (Kugelgeometrie, Geometrie von Riemann, u. s. w.), wo das die Gerade ersetzende Element endlich und geschlossen ist. So tritt in der Kugelgeometrie der Grofskreis an die Stelle der Gerade.

Liegen ein Punkt O und eine diesen Punkt nicht enthaltende Gerade g vor, und denkt man sich die Gerade g von einem Punkte P kontinuierlich durchlaufen, so nähert sich bei der Fortsetzung der Bewegung im einen oder im andern Sinne, wenn P ins Unendliche rückt, die jedesmal vom festen Punkte O und vom beweglichen Punkte P bestimmte „Verbindungsgerade“ OP der nämlichen Grenzlage (*drittes Axiom*).

Wird diese Grenzlage der Gerade OP gedeutet als die Gerade, welche O mit einem unendlich fernen Punkte der gegebenen Gerade g verbindet, so sagt das dritte Axiom offenbar aus, dafs der bewegende Punkt P sich unabhängig vom Sinne der Bewegung dem nämlichen unendlich fernen Punkte nähert, d. h. dafs die Gerade g nur einen unendlich fernen Punkt aufzuweisen hat. Man nennt diesen Punkt den *uneigentlichen* Punkt (oder den *Fluchtpunkt*) der Gerade.

Dieses dritte Axiom unterscheidet die Euclidische Geometrie von den hyperbolischen Geometrieen (Geometrie von Lobatscheffski, Geometrie von Beltrami, u. s. w.), wo die Gerade zwei ganz verschiedene unendlich ferne Punkte besitzt.

Digitized by Google

Aufgabe 1. Unterscheiden die elliptischen und hyperbolischen Geometrieen sich nicht auch dadurch von einander, dafs die Winkelsumme des Dreiecks in den elliptischen stets gröfser, in den hyperbolischen stets kleiner als zwei rechte Winkel ist, indem dann in der parabolischen oder Euclidischen Geometrie diese Summe immer zwei rechten Winkeln gleich ist?

[Nein. Denn in der Nicht-Legendreschen Geometrie des Herrn M. Dehn (*Math. Ann.*, Bd. 53, S. 404—439) ist die Winkelsumme des Dreiecks zwei rechten Winkeln überlegen, obgleich es durch einen Punkt zu einer Gerade unendlich viele Parallelen (Nichtschneidende) giebt in der durch die Gerade und den Punkt bestimmten Ebene.(3)]

3. **Das Axiom der Ebene.** Der Ort der Geraden OP, welche einen gegebenen festen Punkt O mit allen Punkten P einer gegebenen, nicht durch O gehenden Gerade g verbinden, ist eine Fläche mit der Eigenschaft jede Gerade zu enthalten, welche durch irgend zwei Punkte Q, R der Fläche bestimmt wird.

Diese Fläche nennt man eine *Ebene*; alle anderen Flächen heifsen *krumme Flächen* oder *gebogene Flächen.*

[Es wird der geneigte Leser gebeten, sich an dieser Stelle die Planimetrie mit ihren projektiven und metrischen Sätzen, sowie auch die ebene Geometrie der Lage, die Goniometrie und die ebene Trigonometrie eingeschaltet zu denken.]

Aufgabe 2. Wenn m die unendliche Zahl aller eigentlichen Punkte der Gerade, also $m+1$ die Zahl aller Punkte der Gerade angiebt, wieviel Punkte enthält dann ihrer Erzeugung nach die Ebene?

Aufgabe 3. Wieviel von diesen m^2+m+1 Punkten der Ebene liegen unendlich fern?

[Suche zuerst die Zahl der bei der Erzeugung der Ebene beteiligten Geraden durch O.]

Aufgabe 4. Mit welchem bekannten Satze aus der projektiven Geometrie der Ebene ist das Resultat der vorhergehenden Aufgabe in völligem Einklange?

Aufgabe 5. Welche ist dem Prinzip der Dualität nach die Zahl der in der Ebene enthaltenen Geraden?

Digitized by Google

Aufgabe 6. Zeige, wie die erhaltenen Resultate auf die Dimensionenzahl der die Punkte und Geraden tragenden Gebilde schliefsen lassen.

4. **Der lineare d-dimensionale Raum.** Ein d-dimensionaler Raum wird *linear* (d. h. *eben*) genannt, wenn ihm die Eigenschaft zukommt, die durch irgend zwei seiner Punkte bestimmte Gerade zu enthalten.

Alle anderen Räume heifsen *krumm* oder *gebogen*.

Im folgenden wird das Symbol R_d mit Fufsindex d immer einen *linearen* Raum von d Dimensionen andeuten. Und indem wir im allgemeinen R_n als unseren Operationsraum betrachten, heben wir ausdrücklich hervor, dafs man, wo schlechthin von *Raum* die Rede ist, immer an einen linearen dreidimensionalen Raum R_3 zu denken hat.

5. **Die Erzeugung des Raumes.** Wir beweisen nun folgenden Satz:

Der Ort der Geraden OP, welche einen gegebenen festen Punkt O mit allen Punkten P einer gegebenen nicht durch O gehenden Ebene ε verbinden, ist ein Raum.

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Teile. Zuerst soll gezeigt werden, dafs der erzeugte Ort dreidimensional, nachher, dafs dieses dreidimensionale Gebilde linear ist.

Ist l irgend eine Gerade der gegebenen Ebene ε, so ist[3] der Ort der Gerade g, welche durch O und irgend einen Punkt P von l bestimmt ist, eine Ebene λ, welche dem erzeugten Gebilde ganz angehört. Durchläuft nun l die Ebene ε derart, dafs jeder Punkt P dieser Ebene einmal von l aufgenommen wird — wobei man sich z. B. denken kann, dafs entweder irgend ein endlicher Punkt oder aber der unendlich ferne Punkt von l seine Lage nicht ändert —, so durchstreift die Ebene λ das ganze erzeugte Gebiet. Deshalb[1,3] ist dieses erzeugte Gebilde dreidimensional als Ort einer sich kontinuierlich bewegenden Fläche (Ebene).

Aufgabe 7. Wie wird in den beiden angedeuteten Fällen die Bewegung von l in ε genannt?

Um weiter nachzuweisen, dafs das erzeugte Gebilde linear ist, nehmen wir in diesem Gebilde G_3 zwei Punkte A, B (Fig. 1) willkürlich an, und zeigen, dafs die Gerade AB ganz im G_3 enthalten ist. Aus der Erzeugungsweise

Digitized by Google

von G_3 geht hervor, daſs A und B Punkte sind von Geraden, welche O mit zwei Punkten A' und B' von ε verbinden. Weil nun die Gerade $A'B'$ ganz in ε liegt[3], so gehört jede durch O und einen Punkt P von $A'B'$ bestimmte Gerade OP und deshalb auch die durch O und $A'B'$ bestimmte Ebene, welche den Ort dieser Geraden bildet, dem G_3 an. In dieser Ebene liegen aber die Punkte A, B und deshalb auch die ganze Gerade AB, welche also wirklich im G_3 enthalten ist.

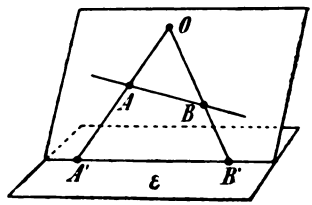


Fig. 1.

Aufgabe 8. Erleidet der zweite Teil dieses Beweises keine Ausnahme, wenn

a) einer der Punkte A', B' oder auch beide unendlich ferne Punkte von ε sind;

b) A und B zusammenfallen;

c) die Gerade AB den Punkt O enthält?

[In Hinsicht auf die Frage sub *a*) muſs hier ausdrücklich bemerkt werden, daſs die unendlich fernen Elemente überhaupt erst im zweiten Paragraphen in Behandlung kommen.]

[Es möge der Leser sich hier die Stereometrie, die räumliche Geometrie der Lage, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und der darstellenden Geometrie, sowie der sphärischen Trigonometrie eingeschaltet denken.]

Aufgabe 9. Welche ist, der Voraussetzung der zweiten Aufgabe gemäſs, die Zahl der durch einen Punkt P eines gegebenen Raumes hindurchgehenden und in diesem Raume liegenden Geraden und Ebenen?

Aufgabe 10. Beweise, daſs die Zahl der Punkte, Geraden und Ebenen eines Raumes durch die Ausdrücke

$$\frac{m^4-1}{m-1}, \quad \frac{(m^4-1)(m^3-1)}{(m^2-1)(m-1)}, \quad \frac{m^4-1}{m-1}$$

dargestellt wird.

[Die mittlere Zahl wird erhalten, indem man die Geraden des Raumes, welche durch einen gegebenen Punkt dieses Raumes gehen, und die diesen Punkt nicht enthaltenden

Digitized by Google

Geraden an und für sich zählt. Auch kann man die Zahl $\frac{1}{2}\,\frac{m^4-1}{m-1}\left(\frac{m^4-1}{m-1}-1\right)$ der Punktepaare des Raumes durch die Zahl $\frac{1}{2}(m+1)m$ der Punktepaare einer Gerade dividieren.]

Aufgabe 11. Wie folgt aus der mittleren Zahl der vorhergehenden Aufgabe, dafs die Zahl der Geraden des Raumes vierfach unendlich ist?

Aufgabe 12. Welche ist, nach Aufgabe 9, die Zahl der uneigentlichen Punkte eines Raumes? Und welcher Satz der projektiven Geometrie verbindet dieses Resultat mit jenem der zweiten Aufgabe?

Aufgabe 13. Wieviel Geraden schneiden zwei zu einander windschiefe Geraden des Raumes (lineare Kongruenz), wieviel Geraden des Raumes schneiden irgend eine in ihm gegebene Gerade (ausgearteter linearer Komplex)?

6. **Die Erzeugung von R_d.** Während wir genötigt waren beim Übergange von der Gerade zur Ebene ein neues Axiom, das Axiom der Ebene[3], anzunehmen, brauchten wir beim Fortschreiten von der Ebene zum Raume nur vorauszusetzen, dafs es aufserhalb der Ebene ε noch einen Punkt O gebe. In der nämlichen Weise führt die Annahme eines aufserhalb eines gegebenen Raumes liegenden Punktes O zu einem Raume R_4 von vier Dimensionen, und hat man ganz allgemein den Satz:

Der Ort der Geraden OP, welche einen gegebenen festen Punkt O mit allen Punkten P eines gegebenen nicht durch O hindurchgehenden Raumes R_{d-1} verbinden, ist ein Raum R_d.

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes wird mittels regelmäfsigen Fortschreitens von der Gerade zur Ebene, von der Ebene zum Raume, vom Raume zum Raume R_4, u. s. w. geführt. Der Ort der Geraden g', g'', ..., welche den Punkt O (Fig. 2) mit den Punkten P', P'', ... einer nicht durch O gehenden Gerade g verbinden, ist, wie wir wissen, eine Ebene. Der Ort der Geraden, welche den aufserhalb dieser Ebene ε gegebenen Punkt O' mit den Punkten dieser Ebene verbinden, ist, wie wir fanden, ein Raum, der auch betrachtet werden kann als Ort der Ebenen ε', ε'', ..., welche den

Digitized by Google

Punkt O' mit den Geraden g', g'', ... von ε verbinden. Der Ort der Geraden, welche den aufserhalb dieses Raumes gegebenen Punkt O'' mit den Punkten dieses Raumes verbinden, ist deshalb auch der Ort der Räume R_3', R_3'', ..., welche den Punkt O'' mit den Ebenen ε', ε'', ... dieses Raumes verbinden, und also ein vierdimensionales Gebilde[14], weil es von einem sich kontinuierlich bewegenden Raume erzeugt wird. Dieses vierdimensionale Gebilde mufs aber linear sein; denn es enthält die durch irgend zwei seiner Punkte A, B bestimmte Gerade AB. Aus der ursprünglichen Erzeugungsweise geht nämlich hervor, dafs A und B Punkte sind von Geraden, welche O'' mit zwei Punkten A' und B' des gegebenen Raumes verbinden; weil dieser Raum linear ist und also die Gerade $A'B'$ enthält, mufs die durch O'' und die Gerade $A'B'$ bestimmte Ebene dem erzeugten Orte ganz angehören und also auch die in dieser Ebene liegende Gerade AB im erzeugten Orte enthalten sein.

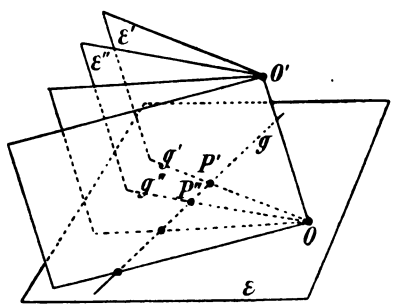


Fig. 2.

Der Ort der Geraden, welche den aufserhalb des so erhaltenen Raumes R_4 gegebenen Punkt O''' mit den Punkten dieses Raumes R_4 verbinden, ist nun ebenfalls wieder der Ort der Räume R_4', R_4'', ..., welche den Punkt O''' mit den Räumen R_3', R_3'', ... von R_4 verbinden, und also ein fünfdimensionales Gebilde, u. s. w.

[Wir möchten hier, ein für allemal, besonders betonen, dafs obiger Beweis des allgemeinen Satzes, sowie alles, was sich weiter in der mehrdimensionalen Geometrie ergeben wird, nicht beeinflufst wird von der Frage nach der wirklichen Existenz. Anstatt darüber zu grübeln, ob es eine Welt giebt, in der man aufserhalb eines gegebenen Raumes einen Punkt annehmen kann, sind wir hier schon ganz zufrieden mit der Thatsache, dafs sich eine solche Welt überhaupt denken läfst.

Wenn wir sagen: unser Operationsraum ist ein R_n, so nehmen wir also, abgesehen von den Mühseligkeiten der Versinnlichung, an, dafs es immer möglich bleibt, aufserhalb

Digitized by Google

eines erhaltenen Raumes R_d einen Punkt zu finden, solange $d < n$ ist, dafs aber für $d = n$ alle Punkte unserer Welt in Betracht gezogen sind.]

Aufgabe 14. Beweise, dafs der Raum R_n nach der Voraussetzung der zweiten Aufgabe $\frac{m^{n+1}-1}{m-1}$ Punkte enthält.

Aufgabe 15. Berechne nach derselben Voraussetzung die Zahl der uneigentlichen Punkte von R_n und vergleiche das Resultat mit der Zahl der Punkte eines Raumes R_{n-1}.

7. **Umkehrung des allgemeinen Erzeugungssatzes.** Umgekehrt ist jeder Raum R_d ganz allgemein zu deuten als der Ort der Geraden, welche einen Punkt O mit den Punkten eines O nicht enthaltenden Raumes R_{d-1} verbinden. Wir geben den Beweis für den speziellen Fall $d = 4$.

In dem gegeben vorliegenden Raume R_4 nehmen wir den Punkt A ganz willkürlich an. Aufser A mufs der R_4 dann mindestens noch einen zweiten Punkt B enthalten; denn sonst wäre das gegebene Gebilde ein Punkt, d. h. ein R_0. Nun bestimmen A und B eine dem R_4 ganz angehörende Gerade AB und mufs der R_4 aufser dieser Gerade AB mindestens noch einen Punkt C enthalten, weil das gegebene Gebilde sonst eine Gerade, d. h. ein R_1, wäre. Dann aber gehören auch die Geraden, welche C mit den Punkten von AB verbinden und deren Ort eine Ebene ABC ist, dem R_4 an, und mufs dieser R_4, weil er sonst ein R_2 wäre, aufser der Ebene ABC mindestens noch einen Punkt D enthalten. Weiter liegen dann wieder die Geraden, welche diesen Punkt D mit den Punkten der Ebene ABC verbinden, alle im R_4 und gehört also der Ort dieser Geraden, d. h. der dreidimensionale Raum $ABCD$ dem R_4 an. Endlich mufs der R_4 aufser diesem Raume $ABCD$ mindestens noch einen Punkt O enthalten, weil er sonst ein R_3 wäre. Und nun ergiebt sich unmittelbar, dafs der vierdimensionale Ort der Geraden, welche O mit den Punkten des Raumes $ABCD$ verbinden, mit dem gegebenen R_4 identisch sein mufs; denn der gegebene R_4 mufs einerseits diesen vierdimensionalen Ort enthalten und kann andererseits aufser diesem Orte keinen Punkt aufweisen, weil er sonst mindestens fünfdimensional wäre.

Aus diesem Beweise, der sich leicht auf Räume R_d ausdehnen läfst, geht auch hervor, dafs die bei der Erzeugung

Digitized by Google

des Raumes R_d angewandten Elemente, der Punkt O und der Raum R_{d-1}, im R_d keine besondere Bedeutung haben; nur ist notwendig, dafs O aufserhalb R_{d-1} liege.

Aufgabe 16. Berechne, nach der Voraussetzung der zweiten Aufgabe, die Zahl der Erzeugungsweisen des Raumes.

[Man findet $\frac{m^3(m^4-1)}{m-1}$.]

8. **Bestimmung des Raumes R_d durch $d+1$ Punkte.** Bei der Ableitung des allgemeinen Satzes fanden wir (Fig. 2), dafs die Ebene ε durch den Punkt O und die Gerade g, d. h. durch drei nicht in einer Gerade liegende Punkte, bestimmt ist. Weiter ergab sich, dafs Hinzunahme eines vierten, nicht in ε liegenden Punktes O' zur Bestimmung des Raumes ausreichte, und der Raum durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte bestimmt ist. So weitergehend findet man allgemein, dafs der Raum R_d durch $d+1$ nicht in einem R_{d-1} enthaltene, oder — wie wir sagen wollen — „von einander unabhängige", Punkte bestimmt wird; was dann natürlich einschliefst, dafs von den $d+1$ bestimmenden Punkten keine zwei zusammenfallen, keine drei auf einer Gerade liegen, keine vier sich in einer Ebene befinden sollen, u. s. w.

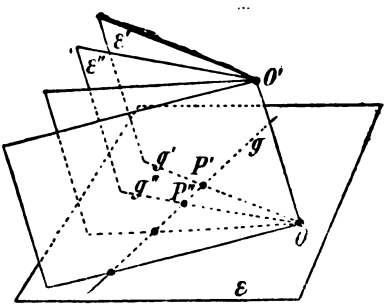


Fig. 2.

Was das Dreieck in der Ebene und das Vierflach im Raume ist, bildet die Figur von $d+1$ von einander unabhängigen Punkten mit den sie zu je zweien verbindenden Geraden, zu je dreien verbindenden Ebenen, zu je vieren verbindenden Räumen, u. s. w. im R_d. Es ist diese mehrdimensionale Figur ein „Simplicissimum" genannt worden, da sie in dieser Hinsicht die einfachste ihrer Art ist, dafs jede Gerade durch zwei Eckpunkte eine Kante, jede Ebene durch drei Eckpunkte eine Seitenfläche, jeder Raum durch vier Eckpunkte ein begrenzender Raum ist, u. s. w., dafs sie also keine Diagonalen, keine Diagonalebenen, keine Diagonal-

Digitized by Google

räume, u. s. w. zuläfst. Giebt das Symbol $(d)_k$ die Binomialkoeffizienten der d^{ten} Potenz an, so ist also $(d+1)_2$ die Zahl der Kanten, $(d+1)_3$ die Zahl der Seitenflächen, u. s. w. und endlich $(d+1)_d = (d+1)_1$ wieder die Zahl der begrenzenden Räume R_{d-1}.

Wir ziehen dem Namen „Simplicissimum" das viel kürzere *Simplex* vor und deuten das Simplex mit $d+1$ Eckpunkten mittels des Symboles $S(d+1)$ an. Es gelten nun die Sätze:

Der Raum R_d wird durch irgend ein in ihm enthaltenes $S(d+1)$ bestimmt.

Der durch ein $S(d+1)$ bestimmte Raum R_d liegt in jedem Raume R_{d+a}, welcher die Eckpunkte des $S(d+1)$ enthält.

Verbindet man die Eckpunkte, Kanten, Seitenflächen, u. s. w. eines den Raum R_d bestimmenden $S(d+1)$ durch Geraden, Ebenen, Räume, u. s. w. mit einem aufserhalb R_d liegenden Punkte P, so erhält man ein den durch R_d und P bestimmten Raum R_{d+1} kennzeichnendes $S(d+2)$. Schafft man umgekehrt von einem den Raum R_d bestimmenden $S(d+1)$ einen Eckpunkt und alle durch ihn gehenden Kanten, Seitenflächen, Grenzräume, u. s. w. beiseite, so bleibt ein $S(d)$ übrig, und der durch dieses Simplex bestimmte Raum R_{d-1} ist im gegebenen Raume R_d ganz enthalten. Wir werden sofort Anlafs haben, diese einfachen Eigenschaften von Ausbau und Zergliederung des Simplex zu benutzen.

9. **Andere Bestimmungsweisen.** Die gegebenen Betrachtungen erlauben uns die Bestimmung des Raumes R_d anders zu gestalten. Dazu brauchen wir das $S(d+1)$ nur auf irgend eine Weise den Eckpunkten nach zu zerstückeln und die Kombination der den Teilen $S(1)$, $S(2)$, ... entsprechenden Räume R_0, R_1, ... als gegeben anzusehen. Wenn wir die Eckpunkte des $S(d+1)$ mit den Ziffern $1, 2, \ldots d+1$ belegen und diejenigen Eckpunkte, welche einen Teil des $S(d+1)$ bestimmen sollen, in runden Klammern zusammenstellen, so lesen wir z. B. aus dem $S(6)$ ab, dafs der Raum R_5 bestimmt ist, sobald die folgenden von einander unabhängigen, auch von den in eckigen Klammern eingerahmten beigefügten Symbolen gekennzeichneten Elemente gegeben sind:

Digitized by Google

[1, 2, 3, 4, 5, 6] ... sechs Punkte,
[1, 2, 3, 4 (5, 6)] ... vier Punkte und eine Gerade,
[1, 2 (3, 4) (5, 6)] ... zwei Punkte und zwei Geraden,
[(1, 2) (3, 4) (5, 6)] ... drei Geraden,
[1, 2, 3 (4, 5, 6)] ... drei Punkte und eine Ebene,
[1 (2, 3) (4, 5, 6)] ... ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene,
[(1, 2, 3) (4, 5, 6)] ... zwei Ebenen,
[1, 2 (3, 4, 5, 6)] ... zwei Punkte und ein Raum,
[(1, 2) (3, 4, 5, 6)] ... eine Gerade und ein Raum,
[1 (2, 3, 4, 5, 6)] ... ein Punkt und ein R_4.

Aufgabe 17. Zähle die 29 verschiedenen Bestimmungsweisen des Raumes R_8 ab.

Aufgabe 18. Welche Beziehung besteht zwischen der in der vorhergehenden Aufgabe auftretenden Zahl 29 und der Frage, auf wieviel verschiedene Arten eine bestimmte Summe mit Geldstücken von 1, 2, 3, 5, 10, 20 Mark bezahlt werden kann? Und was ist dann der „Wert" der Gerade, der Ebene, u. s. w. in Punkten?

Aufgabe 19. Beweise, dafs der Raum R_{59} durch 30 Geraden, 20 Ebenen, 15 Räume, 12 Räume R_4, 10 Räume R_5, 6 Räume R_9, 5 Räume R_{11}, 4 Räume R_{14}, 3 Räume R_{19} und 2 Räume R_{29} bestimmt werden kann.

10. **Die Dimensionensumme der Bestimmungsstücke.** Sind die Räume R_{d_1}, R_{d_2}, ... R_{d_p} derweise von einander unabhängig, dafs man die Eckpunkte eines Simplex erhält, falls man in jedem dieser p Räume R_{d_i} ein $S(d_i + 1)$ annimmt und die Eckpunkte dieser $S(d_i + 1)$ zusammenfügt, so bestimmen diese p Räume R_{d_i} offenbar einen Raum R_d, dessen Dimensionenanzahl d durch die Gleichung

$$(d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \ldots + (d_p + 1) = (d + 1) \qquad 1)$$

oder

$$\sum_1^p d_i + (p - 1) = d \qquad 2)$$

bestimmt wird. In dieser Weise wird also z. B. der Raum R_d durch die Paare von einander unabhängiger Elemente (R_0, R_{d-1}), (R_1, R_{d-2}), ... (R_p, R_{d-p-1}) ... bestimmt.

Aufgabe 20. Bestätige die Beziehung 2) für jede der zehn oben angeführten Bestimmungsweisen des Raumes R_5.

Digitized by Google

wir diese Figur, den Eckpunkten nach, einerseits zu einem $S(w_1)$ durch Hinzufügung von $w_1 - w_{1,2}$ willkürlichen Punkten von R_{w_1}, andererseits zu einem $S(w_2)$ durch Hinzufügung von $w_2 - w_{1,2}$ willkürlichen Punkten von R_{w_2}, so bilden die

$$w_{1,2} + (w_1 - w_{1,2}) + (w_2 - w_{1,2})$$

erhaltenen Punkte die Eckpunkte eines den gesuchten Raum bestimmenden $S(w_1 + w_2 - w_{1,2})$. Es gilt also der Satz:

Wenn zwei Räume R_{w_1} und R_{w_2} einander in einem Raume $R_{w_{1,2}}$ durchdringen, so bestimmen sie einen Raum R_w mit dem Punktwerte

$$w = w_1 + w_2 - w_{1,2}. \qquad 5)$$

Offenbar gilt nun auch die ganz analoge Beziehung

$$d = d_1 + d_2 - d_{1,2} \qquad 6)$$

zwischen den vier entsprechenden Dimensionenzahlen. Allein, ungeachtet dieser Übereinstimmung, ziehen wir doch die Form 5) in w der Form 6) in d vor. Denn die erstere ist, wie die Formel 4) für $p = 2$ lehrt, auch gültig für den Fall $w_{1,2} = 0$, d. h. wenn die Räume R_{w_1} und R_{w_2} von einander unabhängig sind. Hingegen braucht die zweite dann zu diesem Zwecke die allerdings gekünstelte Interpretation, nach welcher zwei von einander unabhängige Räume einen Raum mit der negativen Einheit als Dimensionenzahl gemein haben sollen; denn für $p = 2$ giebt 2) die Beziehung

$$d = d_1 + d_2 + 1.$$

Nun ist in gewisser Hinsicht gegen diese Deutung nichts einzuwenden; denn sie bildet die der Voraussetzung $i = 0$ entsprechende Konsequenz der allgemeinen Beziehung $\overline{R}_i = R_{i-1}$. Jedoch es bleibt R_{-1} eine uneigentliche Bezeichnungsweise, die man besser vermeidet.

13. **Bestimmung eines linearen Raumes durch zwei lineare Räume mit gemeinsamen Punkten.** Es bestimmt, den allgemeinen Formeln 5) und 6) nach, ein Raum R_d (R_w) mit einer ihn schneidenden Gerade einen Raum R_{d+1} (R_{w+1}), ebenso ein Raum R_d (R_w) mit einer ihn in einer Gerade — oder in einem Punkte — schneidenden Ebene einen Raum R_{d+1} (R_{w+1}) — oder einen Raum R_{d+2} (R_{w+2}), u. s. w.

Diese allgemeinen Ergebnisse sind also einander dem Wortlaute nach gleich, ob man sie in Dimensionenzahlen

Digitized by Google

oder in Punktwerten ausdrückt. Möchte sich dies künftighin oft wiederholen, so könnte man zur Umgehung der doppelten Schreibweise R_d (R_w), R_{d+1} (R_{w+1}), u. s. w. die Symbole R_v, R_{v+1}, u. s. w. verwenden, wo v sowohl als d wie als w gedeutet werden kann. So würden die Gleichungen 5) und 6) in der Sammelform

$$v = v_1 + v_2 - v_{1,2} \qquad 7)$$

erscheinen. Allerdings wird es überflüssig sein, für das Raumsymbol ein neues Zeichen anzunehmen; denn offenbar werden wir R_v nur für unbestimmte Werte von v brauchen.

Man findet nun z. B. für $\overline{R}_5$ nebst den zwei Bestimmungsweisen [1 (2, 3, 4, 5)] und [(1, 2) (3, 4, 5)] von Nr. 11, welche nach Nr. 12 als $(R_0, R_3) = (\overline{R}_1, \overline{R}_4)$ und $(R_1, R_2) = (\overline{R}_2, \overline{R}_3)$ erscheinen, noch die vier Bestimmungsweisen durch einen Raum und eine ihn schneidende Gerade, durch zwei Ebenen mit gemeinsamem Punkte, durch einen Raum und eine ihn in einer Gerade schneidende Ebene, und durch zwei Räume mit gemeinsamer Ebene; in der Sprache des Simplex lauten diese neuen Fälle [(1, 2) (2, 3, 4, 5)], [(1, 2, 3) (3, 4, 5)], [(1, 2, 3) (2, 3, 4, 5)] und [(1, 2, 3, 4) (2, 3, 4, 5)].

Aufgabe 24. Schreibe die Symbole hin der sechs neuen Bestimmungsweisen von $R_5 = \overline{R}_6$.

14. Verschiedenes Verhalten zweier linearer Räume. In einer Ebene lassen zwei Geraden nur zwei verschiedene Lageverhältnisse zu: sie können entweder einen $\overline{R}_1$ gemein haben, d. h. einander schneiden, oder einen $\overline{R}_2$ gemein haben, d. h. zusammenfallen. Im Raume giebt es aber bekanntlich drei verschiedene Lageverhältnisse zweier Geraden, indem die Möglichkeit einen $\overline{R}_0$ gemein zu haben, d. h. einander zu kreuzen, hinzutritt. Es sind hiermit auch für Räume höherer Dimensionenzahl alle möglichen Lageverhältnisse zweier Geraden aufgezählt. Und nimmt man anstatt zweier Geraden eine Gerade und eine Ebene, so bleibt das Resultat das nämliche; nur hat man den Ausdruck „die Geraden fallen zusammen“ in den Ausdruck „die Gerade liegt in der Ebene“ umzuändern. Zwei Ebenen haben im Raume entweder $\overline{R}_2$ oder $\overline{R}_3$, im Raume $R_4 = \overline{R}_5$ entweder $\overline{R}_1$, oder $\overline{R}_2$, oder $\overline{R}_3$, im Raume $R_5 = \overline{R}_6$ entweder $\overline{R}_0$, oder $\overline{R}_1$, oder $\overline{R}_2$,

Digitized by Google

oder $\overline{R}_3$ gemein. Es werden diese und alle anderen analogen Ergebnisse von der allgemeinen Formel 5) beherrscht. Denn in der w-Form dieser Beziehung hat man offenbar $w \leqq n+1$; wird nun noch angenommen, dafs w_1 niemals gröfser sei als w_2, was immer durch Umtausch von w_1 und w_2 zu erzielen ist, so ist auch $w_{1,2} \leqq w_1$. Also hat man

$$w_1 + w_2 - (n+1) \leqq w_{1,2} \leqq w_1.$$

Bei positivem Werte von $w_1 + w_2 - n$ ist die Zahl der verschiedenen möglichen Fälle also $n + 2 - w_2$, bei negativem Werte von $w_1 + w_2 - (n+2)$ ist diese Zahl $w_1 + 1$. Und für den gemeinsamen Fall $w_1 + w_2 = n + 1$ ist sie sowohl in der ersten wie in der zweiten Form zu schreiben.

Allein es ist wieder viel übersichtlicher, sich der beim Simplex eingeführten Symbole zu bedienen. Denn man sieht dann z. B. sofort ein, dafs zwei Ebenen im $\overline{R}_6$ in Bezug auf einander die vier Lageverhältnisse [(1, 2, 3) (4, 5, 6)], [(1, 2, 3) (3, 4, 5)], [(1, 2, 3) (2, 3, 4)], [(1, 2, 3) (1, 2, 3)] haben können.

Aufgabe 25. Symbolisiere nach einander die verschiedenen Lageverhältnisse der Räume R_4 und R_5, welche entweder in einem Raume R_{10}, oder in einem Raume R_8 liegen.

[Es wird dem Leser dringend empfohlen, sich mit den verschiedenen Lageverhältnissen der Räume vertraut zu machen, weil es für das Verständnis der mehrdimensionalen Geometrie äufserst notwendig ist, klar einzusehen, dafs z. B. zwei willkürliche Ebenen im R_4 (R_5) einen Punkt gemein haben (einander kreuzen), u. s. w.].

15. **Drei und mehr lineare Räume mit gemeinsamen Punkten.** Wir fragen zuerst nach dem Punktwerte w des Raumes R_w, bestimmt durch die drei Räume R_{w_1}, R_{w_2}, R_{w_3}, wenn diese Räume zu je zweien die Räume $R_{w_{2,3}}$, $R_{w_{1,3}}$, $R_{w_{1,2}}$, und diese drei letzten Räume den Raum $R_{w_{1,2,3}}$ mit einander gemein haben.

Es wird dieses Problem mittels dreimaliger Anwendung der Formel 5) erledigt. Sofort ersetzen wir die zwei Räume R_{w_1} und R_{w_2}, welche den Raum $R_{w_{1,2}}$ gemein haben, durch den von ihnen bestimmten Raum $R_{w_1+w_2-w_{1,2}}$, so dafs wir jetzt nur noch mit den zwei Räumen $R_{w_1+w_2-w_{1,2}}$ und R_{w_3}

Digitized by Google

zu thun haben, welche die den Raum $R_{w_{1,2,3}}$ enthaltenden Räume $R_{w_{2,3}}$ und $R_{w_{1,3}}$ gemein haben. Dann ersetzen wir diese zwei Räume $R_{w_{2,3}}$ und $R_{w_{1,3}}$ mit gemeinsamem $R_{w_{1,2,3}}$ durch den von ihnen bestimmten Raum $R_{w_{2,3}+w_{1,3}-w_{1,2,3}}$. Und endlich finden wir, dafs die durch diesen letzten Raum hindurchgehenden Räume $R_{w_1+w_2-w_{1,2}}$ und R_{w_3} einen Raum mit dem Punktwerte

$$w = \Sigma w_1 - \Sigma w_{1,2} + w_{1,2,3} \qquad 8)$$

bestimmen, welches Ergebnis offenbar die Verallgemeinerung der Formel 5) für den Fall von drei Räumen bildet.

So ist für den dem Symbole

[(1, 2, 3, 4) (2, 3, 4, 5) (3, 4, 5, 6)]

entsprechenden Fall z. B.:

$w_1 = w_2 = w_3 = 4$, $w_{2,3} = 3$, $w_{1,3} = 2$, $w_{1,2} = 3$, $w_{1,2,3} = 2$

und deshalb $w = 6$; was offenbar stimmt, weil im ganzen im Symbole nur sechs Punkte verwendet worden sind.

Aufgabe 26. Leite aus der Entstehungsweise der Gleichung 8) ab, dafs zwischen den Dimensionenzahlen der betrachteten Räume die nämliche Beziehung besteht, wenn man nur alle möglicherweise verschwindenden Gröfsen w durch die negative Einheit ersetzt.

Aufgabe 27. Wende diese Formel in den Gröfsen d an auf den Fall, dafs ein Dreieck gegeben vorliegt und zuerst die Seiten des Dreiecks als gegebene Räume R_1, nachher die Eckpunkte des Dreiecks als gegebene Räume R_0 betrachtet werden.

[Man hat zuerst

$d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $d_{2,3} = d_{1,3} = d_{1,2} = 0$, $d_{1,2,3} = -1$

und nachher

$d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $d_{2,3} = d_{1,3} = d_{1,2} = d_{1,2,3} = -1$.]

Es liegt nun die Vermutung nahe, dafs die Verallgemeinerung der Formel 5) für den Fall von p gegebenen Räumen die allgemeine Gestalt

$$w = \Sigma w_1 - \Sigma w_{1,2} + \Sigma w_{1,2,3} - \ldots + (-1)^{p-1} w_{1,2,3\ldots p} \qquad 9)$$

annehmen wird. Wirklich wird es uns nicht schwer fallen, diese Beziehung zu erhärten, nachdem wir zuerst den Beweis für den Fall $p = 3$ anders geführt haben werden. Es ist

Digitized by Google

nämlich nicht leicht, den schon für die Formel 8) gegebenen Beweis zu erweitern, weil in diesem die verschiedenen Räume nicht symmetrisch verwendet worden sind. Wir beseitigen dieses Übel, indem wir, anstatt 5) dreimal anzuwenden, den Weg des Beweises von 5) verfolgend, 8) unmittelbar zu erhalten suchen.

Wir nehmen in $R_{w_{1,2,3}}$ ein $S(w_{1,2,3})$ an und ergänzen dieses Gebilde nach einander dreimal, zuerst zu einem $S(w_{2,3})$ in $R_{w_{2,3}}$, dann zu einem $S(w_{1,3})$ in $R_{w_{1,3}}$, endlich zu einem $S(w_{1,2})$ in $R_{w_{1,2}}$, indem wir zuerst $w_{2,3} - w_{1,2,3}$ willkürliche Punkte von $R_{w_{2,3}}$, dann $w_{1,3} - w_{1,2,3}$ willkürliche Punkte von $R_{w_{1,3}}$, endlich $w_{1,2} - w_{1,2,3}$ willkürliche Punkte von $R_{w_{1,2}}$ hinzufügen. Dann fragen wir, wieviel willkürliche Punkte von R_{w_1}, R_{w_2}, R_{w_3} jetzt noch hinzugenommen werden müssen, damit man in diesen Räumen die diese Räume bestimmenden Simplexe erhalte. Es ist diese Zahl für R_{w_1} nun

$$w_1 - (w_{1,3} - w_{1,2,3}) - (w_{1,2} - w_{1,2,3}) - w_{1,2,3}$$
$$= w_1 - w_{1,2} - w_{1,3} + w_{1,2,3}$$

und also für R_{w_2} und R_{w_3} nach einander $w_2 - w_{1,2} - w_{2,3} + w_{1,2,3}$ und $w_3 - w_{1,3} - w_{2,3} + w_{1,2,3}$. Es sind also im ganzen

$$w_{1,2,3} + \Sigma(w_{1,2} - w_{1,2,3}) + \Sigma(w_1 - w_{1,2} - w_{1,3} + w_{1,2,3}), \quad 10)$$

oder

$$\Sigma w_1 - \Sigma w_{1,2} + w_{1,2,3}$$

von einander unabhängige Punkte angenommen worden; d. h. wenn w der Punktwert des gesuchten Raumes ist, so gilt die Beziehung 8).

Es ist natürlich ein Leichtes, obige symmetrische Ableitung auf den Fall von p Räumen auszudehnen. Schreibt man nämlich die entsprechende Summe 10) hin, so ergiebt sich für den Koeffizienten von

$$w_i \quad \dots 1,$$
$$w_{i,j} \quad \dots 1 - (2)_1 = 1 - 2 = -1,$$
$$w_{i,j,k} \dots 1 - (3)_1 + (3)_2 = 1 - 3 + 3 = 1,$$

u. s. w. und endlich für den Koeffizienten des einzigen $w_{1,2,\dots p}$

$$1 - (p)_1 + (p)_2 - (p)_3 + \dots + (-1)^{p-1}(p)_{p-1}$$
$$= (1-1)^p + (-1)^{p-1},$$

Digitized by Google

d. h. $(-1)^{p-1}$. Und hierdurch ist der Beweis der allgemeinen Beziehung 9) geliefert.

Aufgabe 28. Drei in einer Ebene einander teilweise bedeckende Kreise vom Inhalt I_1, I_2, I_3 begrenzen zu je zweien Linsen vom Inhalt $I_{2,3}$, $I_{1,3}$, $I_{1,2}$ und zu dreien ein Kreisbogendreieck vom Inhalt $I_{1,2,3}$. Man wünscht, den Inhalt I der von diesen Kreisen eingeschlossenen Figur zu berechnen.

Aufgabe 29. Dehne die vorhergehende Aufgabe auf vier Kugeln im Raume aus.

Aufgabe 30. Beweise, dafs die Formel 9) unter Annahme der bekannten uneigentlichen Bezeichnungsweise auch für Dimensionenzahlen gilt.

[Man hat die Identität $(1-1)^p = 0$ anzuwenden.]

Aufgabe 31. Wende die Formel 9) und die ihr ähnliche Formel in d auf den Fall an, dafs man die Kanten eines Vierflachs als gegebene Räume betrachtet.

[Man hat $\Sigma w_1 = 12$, $\Sigma w_{1,2} = 12$, $\Sigma w_{1,2,3} = 4$, und die Gröfsen w mit vier und mehr Indices verschwinden. Weiter ist $\Sigma d_1 = 6$, $\Sigma d_{1,2} = -3$, $\Sigma d_{1,2,3} = -16$, $\Sigma d_{1,2,3,4} = -15$, $\Sigma d_{1,2,3,4,5} = -6$ und $d_{1,2,3,4,5,6} = -1$.]

Aufgabe 32. Beweise, dafs die in d transponierte Gleichung 9) in 2) übergeht unter der Voraussetzung, dafs p lineare Räume gegeben sind, von welchen kein Paar einen gemeinsamen Punkt aufzuweisen hat.

[Man hat wieder die Identität $(1-1)^p = 0$ zu verwenden.]

16. **Bestimmung eines linearen Raumes durch drei und mehr lineare Räume mit gemeinsamen Punkten.** Betrachtet man die linke Seite der Gleichung 9) als gegeben und erteilt man den rechts auftretenden Gröfsen alle der Gleichung Genüge leistenden sich mit einander vertragenden Werte, so erhält man ebensoviele Bestimmungsweisen des Raumes R_w. Allein da es keinen Zweck hat, hier auf diese unbestimmte Gleichung näher einzugehen, so möge es genügen, den hingeworfenen Gedanken von einem Beispiele aus zu beleuchten.

Wir wollen untersuchen, ob es möglich sei, den Raum $R_4 = \bar{R}_5$ zu bestimmen durch eine gewisse Anzahl von Räumen, von welchen je zwei eine Ebene, je drei eine

Digitized by Google

Gerade, je vier einen Punkt und je fünf nichts gemein haben. Ist x die gesuchte Zahl, so giebt 9)

$$5 = 4x - 3\frac{x(x-1)}{2} + 2\frac{x(x-1)(x-2)}{6} - \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24},$$

oder

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0,$$

d. h.

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0.$$

Es kann also x die Werte 2, 3, 4, 5 annehmen. Wirklich sieht man leicht, dafs diese Lösungen [(1, 2, 3, 4) (1, 2, 3, 5)], u. s. w. vorliegen und zugleich die einzig möglichen sind. Im letzten Falle begrenzen die fünf Räume mit einander ein $S(5)$; von dieser Figur kann man mit Hinsicht auf die Bestimmung des Raumes R_4 entweder einen Raum, oder zwei, oder drei Räume weglassen.

Aufgabe 33. Stelle die nämliche Gleichung vierten Grades auf mit Hilfe der in d transponierten Gleichung 9).

[Man hat auf die Gleichung

$$4 = 3x - 2\frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} - \{(x)_5 - (x)_6 + \ldots + (-1)^{x-1}(x)_x\}$$

die aus der Identität $(1-1)^x = 0$ hervorgehende Beziehung $(x)_5 - (x)_6 + \ldots + (-1)^{x-1}(x)_x = 1 - (x)_1 + (x)_2 - (x)_3 + (x)_4$ anzuwenden.]

---

§ 2. Parallelismus.

17. **Das Unendliche des Raumes R_d.** Nach den in der Euclidischen Geometrie zur Geltung kommenden Axiomen der Gerade[2] sind zwei Geraden der Ebene, die keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben und deshalb „parallel" heifsen, als zwei Geraden mit dem nämlichen unendlich fernen Punkte zu betrachten. Ebenso erscheinen im Raume zwei Ebenen, die keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein

Digitized by Google

haben und deshalb „parallel“ genannt werden, als zwei Ebenen mit dem nämlichen Orte von unendlich fernen Punkten. Wäre es erlaubt, diesen Ort als eine uneigentliche Gerade zu betrachten, so würden zwei Ebenen im Raume *immer* eine Gerade mit einander gemein haben. Und nun ergiebt sich leicht, dafs man diesen Ort nicht nur so betrachten kann, sondern sogar so betrachten mufs. Dreht die Gerade g in einer Ebene ε um einen Punkt P, so durchläuft der uneigentliche Punkt dieser Gerade den gesuchten Ort; also ist dieser Ort eine Linie[1]. Allein diese Linie ist durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt und deshalb eine Gerade[2]. Denn die Verbindungsgerade der uneigentlichen Punkte von zwei der in ε durch P gezogenen Geraden mufs ganz ins Unendliche verschwinden, da sie, wenn sie einen eigentlichen Punkt enthielte, eine eigentliche Gerade mit mindestens zwei verschiedenen uneigentlichen Punkten wäre. Und eine solche Gerade kennt die Euclidische Geometrie nicht.

Aufgabe 34. Beweise, dafs die Grenzfigur eines sich in einer Ebene um einen festen Mittelpunkt herum unbestimmt ausdehnenden Kreises die *doppelt gezählte* uneigentliche Gerade der Ebene ist.

Wir beweisen nun sofort den folgenden ganz allgemeinen Satz:

Der Ort der unendlich fernen Punkte irgend eines Raumes R_d mit einem eigentlichen Punkte P ist ein linearer Raum von $d-1$ Dimensionen.

Der Ort der uneigentlichen Punkte des Raumes R_d ist linear. Sind nämlich P_∞ und P'_∞ irgend zwei ihrer Punkte, so bestimmen die Geraden PP_∞ und PP'_∞ eine Ebene, deren uneigentliche Gerade g_∞ die Verbindungsgerade von P_∞ und P'_∞ ist; da diese Ebene dem Raume R_d angehört, mufs die uneigentliche Gerade g_∞ dieser Ebene also im Unendlichen des Raumes R_d liegen.

Aufgabe 35. Würde es zum Beweise dieser Linearität nicht hinreichen, zu bemerken, dafs die Verbindungsgerade $P_\infty P'_\infty$ eine eigentliche Gerade mit zwei verschiedenen uneigentlichen Punkten sein würde, falls sie einen eigentlichen Punkt besäfse?

[Weil wir uns hier bestreben, die unendlich fernen Punkte, Geraden, Ebenen, u. s. w. als uneigentliche Elemente von

Digitized by Google

eigentlichen Geraden, Ebenen, Räumen, u. s. w. einzuführen, ist diese Auffassung unserem Zwecke nicht angemessen.]

Es liegt uns nun noch ob, zu zeigen, dafs $d-1$ die Dimensionenzahl des linearen Ortes der unendlich fernen Punkte eines Raumes R_d mit einem eigentlichen Punkte ist. Am kürzesten gelangen wir folgendermafsen zum Ziele. Werden alle Punkte des linearen Ortes mit dem eigentlichen Punkte P verbunden, so werden offenbar alle durch P gehenden Geraden und also auch alle Punkte des Raumes R_d erzeugt. Deshalb wird R_d durch den gesuchten Ort und den Punkt P bestimmt und mufs dieser Ort also[6a] ein Raum von $d-1$ Dimensionen sein.

Zu einem zweiten Beweise, der uns zugleich etwas mehr lehren wird, denken wir uns den R_d durch eine durch P gehende Gerade und einen diese Gerade nicht enthaltenden, ebenfalls durch P gehenden Raum R_{d-1} bestimmt, und setzen voraus, der zu beweisende Satz sei schon für diesen R_{d-1} bewiesen, d. h. wir wissen, dafs der Ort der unendlich fernen Punkte dieses Raumes R_{d-1} $d-2$ Dimensionen hat. Aus der Bemerkung, dafs R_d jede Ebene enthält, welche g mit einer durch P gehenden Gerade von R_{d-1} verbindet, ist dann unmittelbar zu folgern, dafs der gesuchte Ort erhalten wird, falls man den uneigentlichen Punkt G_∞ von g mit allen Punkten vom Orte der uneigentlichen Punkte von R_{d-1} verbindet. Also[6a] hat der Ort der uneigentlichen Punkte von R_d $d-1$ Dimensionen, wenn der entsprechende Ort bei R_{d-1} $d-2$ Dimensionen hat. Deshalb wird der allgemeine Satz, wenn man von der Gerade R_1 mit ihrem einzigen uneigentlichen Punkte aufsteigt, mittels der Schlufsweise von p auf $p+1$ bewiesen.

Den gefundenen Ort nennen wir U_{d-1}, indem wir zur Erhöhung der Deutlichkeit ein lineares unendlich fernes Gebilde stets mit dem Buchstaben U bezeichnen.

Wenn ein linearer Raum von d Dimensionen keinen eigentlichen Punkt enthält, ist er offenbar ein U_d. Deshalb ist im allgemeinen Satze absichtlich angenommen worden, dafs R_d einen eigentlichen Punkt P enthalte.

Insbesondere ist das Unendliche des Operationsraumes R_n ein alle U_d enthaltender U_{n-1}.

In Rücksicht auf die Thatsache, dafs die Räume U_d nur eine Art von Punkten enthalten, indem der bei den Räumen R_d

Digitized by Google

auftretende Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Punkten bei ihnen verschwindet, spricht G. Veronese von *vollkommenen* Räumen U_d. Wir werden hier das Prädikat *uneigentlich* beibehalten, es aber wo möglich unterdrücken.

Oben ist behauptet worden, dafs die zweite Ableitung der Dimensionenzahl des linearen Ortes der uneigentlichen Punkte von R_d uns mehr lehren würde. Wirklich führt sie unmittelbar zum folgenden Satze:

Der Ort der Geraden $O_\infty P_\infty$, welche einen gegebenen uneigentlichen Punkt O_∞ mit allen Punkten P_∞ eines gegebenen, nicht durch O_∞ hindurchgehenden Raumes U_{d-1} verbindet, ist ein Raum U_d. Und umgekehrt kann jeder Raum U_d auf diese Weise erzeugt werden.

Dieser Satz kann der Erzeugungssatz der uneigentlichen Räume genannt werden; er giebt für uneigentliche Räume, was die Nr. 6 und 7 für eigentliche Räume leisten. In dem in ihm auftretenden Punkte O_∞ erkennt man den uneigentlichen Punkt der bei der zweiten Ableitung verwendeten Gerade g; zur Vereinfachung ist $d-1$ durch d ersetzt worden.

18. **Die perspektive Anschauung der unendlich fernen Elemente.** Wie in allen Lehrbüchern der Geometrie der Lage betont wird, beseitigt die im Anfange der vorhergehenden Nummer hervorgehobene, von von Staudt herrührende, sogenannte „perspektive" Anschauung der unendlich fernen Elemente alle Ausnahmefälle der zwischen Punkten, Geraden und Ebenen obwaltenden Lageverhältnisse. Nur bei ihrer Annahme haben, wie es Formel 2) verlangt, zwei Geraden einer Ebene *immer* einen Punkt, zwei Ebenen eines Raumes *immer* eine Gerade mit einander gemein. Und wir werden bald Gelegenheit haben zu zeigen, dafs alle scheinbaren Ausnahmefälle der Formel 4) und der aus ihr abgeleiteten Beziehungen 5) bis 9) verschwinden im Lichte des vorletzten allgemeinen Satzes, welcher, die bekannten Sätze „Das Unendliche der Gerade, der Ebene, des Raumes ist respektive ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene" einschliefsend, nur die Konsequenz bildet des dritten Axioms der Gerade ausgesprochen in der Form: „Das Unendliche der Gerade ist ein einziger Punkt."

Unser jetziger Standpunkt ist also dieser, dafs wir die Formel 2) noch als unbewiesen betrachten, wenn einer der in

Digitized by Google

ihr auftretenden Räume ein uneigentlicher Raum ist, woraus folgt, dafs es uns obliegt, in diesem Paragraphen — vergleiche unten Nr. 26 — die ausnahmslose Gültigkeit dieser Formel darzuthun.

19. **Parallele Räume von gleicher Dimensionenzahl.** Es sollen zwei Räume R_d und R'_d einander parallel heifsen, wenn ihre Örter von unendlich fernen Punkten zusammenfallen.

Man hat dann sofort den Satz:

Zwei Räume R_d und R'_d sind einander parallel, sobald jeder von ihnen einem nämlichen dritten Raume R''_d parallel ist.

Aus obiger Definition geht hervor, dafs zwei *verschiedene* parallele Räume R_d und R'_d keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben können. Denn die Voraussetzung, dafs die den nämlichen Raum U_{d-1} enthaltenden Räume R_d und R'_d noch einen eigentlichen, also aufserhalb U_{d-1} liegenden Punkt P gemein hätten, würde erlauben, beide Räume als durch U_{d-1} und P bestimmt zu betrachten[17a], und deshalb die Koincidenz dieser Räume bedingen.

In der Stereometrie sind zwei Ebenen einander parallel, sobald sie keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dafs der oben gefundene Satz „Zwei einander parallele Räume R_d und R'_d haben keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein" nun auch allgemein umkehrbar ist, und zwei Räume R_d und R'_d also einander parallel sein müssen, sobald sie keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben. Denn diese irrige Meinung, nach welcher die von einander unabhängigen Räume R_d und R'_d des vorhergehenden Paragraphen einander allemal parallel sein sollten, wird schon widerlegt durch das ebenfalls der Stereometrie entnommene Beispiel zweier zu einander windschiefer Geraden.

Weshalb sind dann aber in der Stereometrie zwei keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein habende Ebenen ohne weiteres einander parallel? Natürlich weil sie in einem nämlichen Raume liegen. Wirklich kann allgemein gezeigt werden, dafs zwei keinen eigentlichen Punkt gemein habende Räume R_d und R'_d, wie es die Formel 6) erheischt, den nämlichen uneigentlichen Raum U_{d-1} enthalten, sobald sie in einem nämlichen Raume R_{d+1} liegen. Dazu bemerken wir, dafs die Ebene, welche irgend eine Gerade g

Digitized by Google

von R_d mit irgend einem Punkte P' von R'_d verbindet, drei von einander unabhängige Punkte mit R_{d+1} gemein hat, also[85] in R_{d+1} liegt und deshalb nach Formel 6) jede der in R_{d+1} gegebenen Räume R_d und R'_d in einer Gerade schneiden mufs. Weil diese Schnittgeraden keinen eigentlichen Punkt gemein haben können, da die Räume R_d und R_d' solche Punkte ebenfalls nicht besitzen, so sind sie einander parallel; d. h. der unendlich ferne Punkt der in R_d enthaltenen Gerade g liegt auch in R'_d. Deshalb liegt jeder uneigentliche Punkt von R_d in R'_d und umgekehrt, woraus folgt, dafs die Räume R_d und R'_d im Orte der uneigentlichen Punkte übereinstimmen; dieser gemeinschaftliche Ort ist aber[174] ein U_{d-1}, u. s. w.

Vergleichen wir nun die der perspektiven Anschauung der unendlich fernen Elemente entstammende Definition des Parallelismus mit der mehrdimensionalen Verallgemeinerung der in der alten Geometrie gebräuchlichen, nach welcher zwei Räume R_d und R'_d, die keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben, einander parallel sind, wenn sie in einem nämlichen R_{d+1} liegen, so leuchtet ein, dafs beide insofern gleichberechtigt sind, als zwei Räume R_d und R'_d, welche den beiden Bedingungen der alten Geometrie Genüge leisten, nun auch der perspektiven Anschauung nach parallel sind. Aber erst nachdem später[215] gezeigt sein wird, dafs zwei Räume R_d und R'_d mit gemeinschaftlichem U_{d-1} sich, ungeachtet der Uneigentlichkeit des Schnittraumes, der Formel 6) unterwerfen und also immer in einem nämlichen R_{d+1} liegen, kann man behaupten, dafs die mit einander zusammenhängenden Definitionen sich ihrer Tragweite nach decken.

Aufgabe 36. Weshalb braucht man, bei Annahme der älteren Definition des Parallelismus für R_n $(n > 3)$ den bekannten Satz der Stereometrie „Zwei Geraden a, b sind einander parallel, falls sie einer dritten Gerade c parallel sind" abermals zu beweisen? Und wie wird der Beweis erbracht?

[Will man den Satz der Stereometrie anwenden, so mufs vorher bewiesen werden, dafs die drei Geraden a, b, c in einem nämlichen Raume liegen.]

Aufgabe 37. Beweise, von der nämlichen Definition

Digitized by Google

ausgehend, dafs auch in R_n zwei Ebenen einander parallel sind, sobald sie einer dritten Ebene parallel sind.

Natürlich kann man, jeden unendlich fernen Punkt durch eine ihn enthaltende Gerade andeutend, die perspektive Auffassung des Parallelismus zweier Räume von d Dimensionen auch folgendermafsen aussprechen: „Zwei Räume R_d und R'_d sind einander parallel, sobald es in R'_d zu jeder Gerade g von R_d eine parallele Gerade g' giebt."

Aufgabe 38. Weshalb ist es nicht notwendig hinzuzufügen „und umgekehrt"?

Später wird sich die Minimumzahl der Paare zu einander paralleler Geraden der Räume R_d und R'_d ergeben, die auf den Parallelismus dieser Räume schliefsen läfst.

20. **Richtung und Stellung.** Anstatt zu sagen, dafs alle Geraden, die einer gegebenen Gerade und mithin auch zu einander parallel sind, den nämlichen uneigentlichen Punkt haben, sagt man auch, dafs diesen Geraden dieselbe *Richtung* zukommt. Ebenso sagt man, dafs Ebenen mit der nämlichen uneigentlichen Gerade dieselbe *Stellung* haben. Wir verallgemeinern diese Terminologie auf die einfachste Art dahin, dafs wir auch zwei Räumen von d Dimensionen dieselbe Stellung zuschreiben, sobald sie einander parallel sind.

Weil der Raum R_d ganz bekannt ist, sobald nebst seinem uneigentlichen Raume U_{d-1} nur noch irgend einer seiner eigentlichen Punkte gegeben vorliegt, so hat man den Satz:

Jeder Raum ist durch seine Stellung und einen eigentlichen Punkt bestimmt.

Denkt man sich die Stellung des zu bestimmenden Raumes dadurch angegeben, dafs dieser Raum einem gegebenen Raume der nämlichen Dimensionenzahl parallel sein soll, so findet man weiter:

Durch einen aufserhalb eines gegebenen Raumes R_d gegebenen Punkt kann immer ein und nur ein Raum R'_d gelegt werden, welcher zu R_d parallel ist.

Es bildet dieser Satz die mehrdimensionale Verallgemeinerung des dritten Axioms der Gerade, ausgesprochen in der Form „Durch einen aufserhalb einer gegebenen Gerade gegebenen Punkt kann nur eine zu der Gerade parallele Gerade gelegt werden".

Digitized by Google

Offenbar kommt man der beschränkten Entwickelung unseres Raumsinnes helfend entgegen, wenn man das Unendlichferne von der Endlichkeit aus zu beherrschen sucht, d. h. wenn man jeden uneigentlichen Raum U_{d-1} durch irgend einen ihn enthaltenden eigentlichen Raum R_d versinnlicht. Steigert man überdies die Einfachkeit dieser Versinnlichung dadurch, dafs man die abbildenden Räume immer durch den nämlichen Punkt P führt, so findet man, dafs die Geraden, Ebenen, Räume, u. s. w. durch P ihre uneigentlichen Elemente abbilden, d. h. es sind — vergleiche[175] den Beweis des ersten allgemeinen Satzes von Nr. 17 — im Sinne der Geometrie der Lage die U_{d-1} des allgemeinen U_{n-1} perspektiv bezogen auf die durch P gehenden Räume R_d des Operationsraumes R_n.

Aufgabe 39. Wie denkt man sich auf einer uneigentlichen Gerade drei Punkte, zwei einander harmonisch trennende Punktepaare, drei Punktepaare einer Involution, und in einer uneigentlichen Ebene vier Punkte, zwei einander harmonisch trennende Punktepaare und Tangentenpaare eines Kegelschnittes, drei Punktepaare und Tangentenpaare einer Involution auf einem und um einen Kegelschnitt herum, u. s. w.?

Aus der perspektiven Beziehung folgt also:

Im R_n deckt sich die Geometrie des uneigentlichen Raumes U_{n-1} mit der Geometrie um den Punkt herum.

In diesem Satze, welcher uns öfters nützlich sein wird, gipfelt die perspektive Anschauung von Staudt's.

21. **Bestimmung des Raumes U_{d-1} durch d Punkte.** Ist R_d irgend ein gegebener Raum und sind $P, A, B, C, \ldots$ (Fig. 3) die $d+1$ Eckpunkte irgend eines den R_d bestimmenden $S(d+1)$, so kann man sich den R_d auch durch die d durch P hindurchgehenden Geraden $PA, PB, PC, \ldots$ bestimmt denken. Bestimmt man weiter diese Geraden $PA, PB, PC, \ldots$ nun wieder mittels des gemeinschaftlichen Punktes P und ihrer uneigentlichen Punkte A_∞, B_∞,

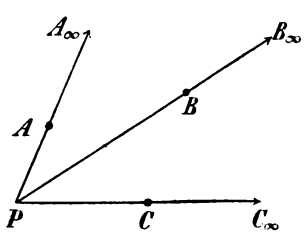


Fig. 3.

Digitized by Google

$C_\infty, \ldots$, so erhält man ein neues $S(d+1)$, dessen Eckpunkte mit Ausnahme von P uneigentliche Punkte sind. Weil R_d nun auch durch seinen Raum U_{d-1} und P bestimmt ist, so muss es erlaubt sein, U_{d-1} als durch die Punkte A_∞, B_∞, $C_\infty, \ldots$ bestimmt zu betrachten. Wirklich zeigt man leicht, dafs es unmöglich ist, durch diese d uneigentlichen Punkte einen zweiten uneigentlichen Raum U'_{d-1} der nämlichen Dimensionenzahl zu legen — um von Räumen $U_{d-(k+1)}$ gar nicht zu reden. Denn, lägen diese d Punkte in zwei verschiedenen Räumen U_{d-1} und U'_{d-1}, so würde das ursprüngliche $S(d+1)$ in zwei verschiedenen Räumen $R_d = (P, U_{d-1})$ und $R'_d = (P, U'_{d-1})$ liegen, was offenbar nicht der Fall sein kann, da $S(d+1)$ einen einzigen Raum R_d bestimmt. Hiermit ist also bewiesen, dafs der uneigentliche Raum U_{d-1} mit jedem eigentlichen Raume der nämlichen Dimensionenzahl die Eigenschaft gemein hat, durch d von einander unabhängige Punkte bestimmt zu sein.

Aufgabe 40. Wende nach einander die Formel 9) und ihre Transkription in d auf die Bestimmung von R_d mittels der d Geraden PA, PB, PC, ... an.

Die d Punkte A_∞, B_∞, C_∞, ... und die sie zu je zweien, dreien, vieren, ... verbindenden Geraden, Ebenen, Räume, ... bilden die Eckpunkte, Kanten, Seitenflächen, Grenzräume, ... eines „uneigentlichen Simplex", das wir mit dem Symbole $S_u(d)$ belegen wollen. Es ist für U_{d-1} eben so wichtig wie ein $S(d)$ für seinen R_{d-1}, und hat mit diesem alle wesentlichen Eigenschaften gemein.

Projiziert man z. B. die Eckpunkte A, B, C, D, E eines Simplex $PABCDE$ und einen aufserhalb des durch dieses $S(6)$ bestimmten R_5 liegenden Punkt F aus P als Centrum auf den uneigentlichen Raum U_{n-1} als Projektionsraum, so erhält man ein uneigentliches Simplex $A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty E_\infty$ und einen aufserhalb des durch dieses $S_u(5)$ bestimmten Raumes U_4 liegenden Punkt F_∞. Da nun, nach den letzten Schlüssen von Nr. 8, durch $S(6)$ und F ein $S(7)$ bestimmt wird, so bestimmen auch $S_u(5)$ und F_∞ ein $S_u(6)$, u. s. w. Also ist es erlaubt, diese Schlüsse unmittelbar vom eigentlichen $S(d+1)$ auf das uneigentliche $S_u(d)$ zu übertragen, was einerseits zum Aufbau, andererseits zur Zergliederung der letzten Figur führt.

Digitized by Google

Der Beweis, dafs zwei Räume R_d und R'_d der gleichen Dimensionenzahl immer in einem Raume R_{d+1} enthalten sind (19,), sobald sie den nämlichen uneigentlichen Raum U_{d-1} besitzen, ist nun leicht zu erbringen. Dazu denke man sich R_d durch U_{d-1} und den willkürlich gewählten eigentlichen Punkt P, R'_d durch U_{d-1} und den willkürlichen eigentlichen Punkt P' bestimmt. Dann liegt der uneigentliche Punkt P_∞ der Verbindungsgerade PP' im allgemeinen nicht in U_{d-1}; denn sonst gehörte jede Verbindungsgerade von irgend einem Punkte P von R_d mit irgend einem Punkte P' von R'_d beiden Räumen an und fielen diese zusammen. Also bestimmt P_∞ mit U_{d-1} einen Raum U_d und sind die Räume R_d und R'_d enthalten im Raume R_{d+1}, welcher durch diesen U_d und irgend einen eigentlichen Punkt der Gerade PP' bestimmt wird.

Oder aber, man nimmt im gemeinschaftlichen U_{d-1} ein $S_u(d)$ an und bestimmt nun R_d durch $S_u(d)$ und P, R'_d durch $S_u(d)$ und P'. Dann bilden die d Eckpunkte von $S_u(d)$ mit P und P' die Eckpunkte eines neuen Simplex $S(d+2)$, welches einen die Räume R_d und R'_d enthaltenden Raum R_{d+1} bestimmt, u. s. w.

Ein Simplex mit sowohl eigentlichen wie uneigentlichen Eckpunkten möge ein „gemischtes“ Simplex heissen und, wo Unterscheidung überhaupt nötig ist, als $S_g(d)$ bezeichnet werden. Es ist dann das zuletzt erhaltene den Raum R_{d+1} bestimmende Simplex ein $S_g(d+2)$.

Es ist nun auch möglich, die Minimumzahl(19,) der Paare zu einander paralleler Geraden zweier Räume R_d und R'_d anzugeben, die auf den Parallelismus dieser Räume schliefsen läfst. Sie ist offenbar d, weil der gemeinschaftliche Raum U_{d-1} zweier paralleler Räume R_d und R'_d bestimmt ist, wenn man d von einander unabhängige Punkte dieses uneigentlichen Raumes kennt. Also kann man sagen:

Es sind zwei Räume R_d und R'_d einander parallel, sobald d durch einen eigentlichen Punkt gehende, nicht in einem R_{d-1} liegende Geraden des einen parallel sind zu Geraden des andern.

Man kann natürlich auch von d von einander unabhängigen Richtungen sprechen.

22. **Das Cartesische Koordinatensystem.** Nimmt man (Fig. 4) in einer Ebene einen Punkt O und zwei durch

Digitized by Google

diesen Punkt gehende Geraden OX_1 und OX_2 beliebig an, so kann man jeden Punkt P dieser Ebene von O aus erreichen, indem man zuerst auf OX_1 eine gewisse Strecke $OA_1 = a_1$ und dann auf der zu OX_2 parallelen Gerade durch A_1 eine gewisse Strecke $A_1P = a_2$ zurücklegt. Dabei ist die Reihenfolge der Bewegungen bekanntlich gleichgültig, d. h. man kommt in den nämlichen Punkt P an, ob man entweder zuerst a_1 auf OX_1 und dann a_2 in der Richtung von OX_2, oder zuerst a_2 auf OX_2 und dann a_1 in der Richtung von OX_1 durchläuft, wenn man nur jeder der beiden Strecken a_1, a_2 ein bestimmtes Zeichen beilegt und also, nicht nur der Gröfse, sondern auch dem Sinne nach, den Gleichungen $OA_2 = A_1P$, $A_2P = OA_1$ Genüge leistet. Es bilden dann, wie die Planimetrie lehrt, die beiden von O nach P führenden Wege den Umrifs eines Parallelogrammes.

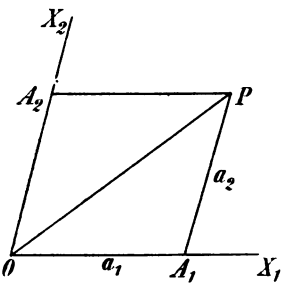


Fig. 4.

Aufgabe 41. Wie kann man aus der Zahl der Koordinaten auf die Zahl der Dimensionen der Ebene schliefsen?

Aufgabe 42. Beweise, dafs die Zahl der Koordinatensysteme der Ebene vierfach, die Zahl der gemischten Simplexe der Ebene fünffach unendlich ist.

Die geführten Überlegungen lassen sich unmittelbar verallgemeinern. Denkt man sich einen Raum R_d durch einen eigentlichen Punkt O und ein seinen U_{d-1} bestimmendes $S_u(d)$ gegeben, und sind OX_1, OX_2, ... die d Geraden, welche O mit den Eckpunkten von $S_u(d)$ verbinden, so kann man jeden Punkt P dieses Raumes R_d erreichen, indem man von O aus nach einander d gewisse Strecken a_1, a_2, ... in der Richtung von OX_1, OX_2, ... durchläuft. Denn, betrachtet man nach einander die verschiedenen Punktsysteme, welche den d Wertsystemen $(x_1, 0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, 0, \ldots)$, ... des Streckensystems $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ entsprechen, wobei jede der Gröfsen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ für sich alle Werte von der negativen bis zur positiven Unendlichkeit durchläuft, und denkt man sich den Übergang vom Systeme $(x_1, x_2, \ldots x_i, 0, 0, \ldots)$

Digitized by Google

zum folgenden Systeme $(x_1, x_2, \ldots x_i, x_j, 0, \ldots)$ dadurch bewirkt, dafs jeder Punkt des ersten durch die hinzukommende Veränderlichkeit der x_j eine zu OX_j parallele Gerade beschreibt, so sieht man nach einander O die Gerade $O(X_1)$, diese Gerade die Ebene $O(X_1, X_2)$, diese Ebene den Raum $O(X_1, X_2, X_3)$, ... erzeugen; das Endergebnis ist dann der gegebene Raum R_d.

Aufgabe 43. Welches Merkmal kennzeichnet bei *dieser* in Stufen erfolgenden Erzeugung der R_d die Erzeugung des uneigentlichen Raumes von allen, den betrachteten Wertsystemen entsprechenden Zwischenräumen und vom R_d?

Es ist leicht einzusehen, dafs auch hier die Reihenfolge der Strecken eines gegebenen Systems $(a_1, a_2, \ldots)$ unwesentlich ist, d. h., dafs man, wie auch diese Reihenfolge geändert wird, immer in den nämlichen Punkt P ankommt, sobald alle Strecken durchlaufen sind. Denn der Umtausch der Reihenfolge bei zwei an einander grenzenden Strecken z. B. a_3 und a_4 (Fig. 5) führt den Weg $OA_1A_2A_3A_4\ldots$ in $OA_1A_2A_3'A_4\ldots$ über, wo die Seiten A_2A_3 und A_3A_4 des Parallelogrammes $A_2A_3A_4A_3'$ durch die Seiten A_2A_3' und $A_3'A_4$ ersetzt sind. Und nun kann man bekanntlich mittels Wiederholung dieses einfachen Prozesses zu irgend welcher Reihenfolge gelangen.

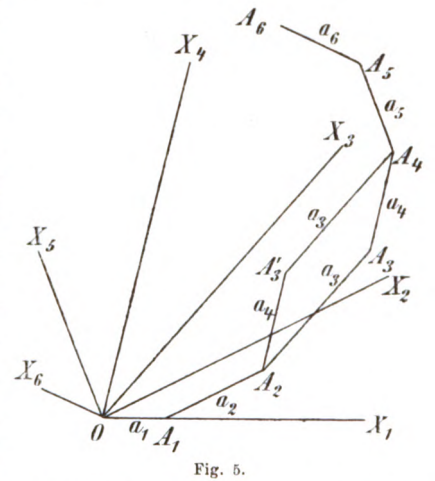


Fig. 5.

Die mit Zeichen versehenen Strecken heifsen nun die *Koordinaten* des Punktes P.

Die Einführung des nach Cartesius zu benennenden Koordinatensystemes wird uns, obgleich wir uns erst im sechsten Paragraphen ausdrücklich mit der analytischen Geometrie der linearen Räume beschäftigen werden, schon sofort

Digitized by Google

nützlich sein, weil sie einfaches Material für erläuternde Beispiele herbeischafft.

23. **Die Ausdehnungslehre von Grafsmann.** Sieht man die Koordinaten OA_1, OA_2 (Fig. 4) des Punktes P als auf den Punkt O wirkende Kräfte an, so ist bekanntlich die Diagonale OP des Parallelogrammes OA_1PA_2 die Resultierende dieser Kräfte. Werden die Koordinaten OA_1, OA_2, ... OA_d des Punktes P im Raume R_d in der nämlichen Weise als auf O wirkende Kräfte gedeutet, so findet man mittels wiederholter Anwendung des vorhergehenden Satzes, dafs die Verbindungsgerade OP vom Ursprunge O mit dem durch die Koordinaten bestimmten Punkte P die Resultierende der d Kräfte versinnlicht. Es kann also auch hier, wie es im Raume R_3 Sitte ist, die gebrochene Linie $OA_1A_2 \ldots A_{d-1}P$ das Kräftepolygon heifsen.

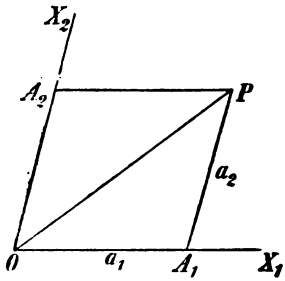


Fig. 4.

Aufgabe 44. Sechs auf einen Punkt wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht. Beweise, dafs das betreffende Kräftepolygon gewifs in einem Raume R_5 enthalten ist.

[Man betrachte irgend eine der sechs Kräfte in umgekehrter Richtung als die Resultierende der andern.]

In der von Grafsmann in seiner „*Ausdehnungslehre*“ gegebenen Sprache bildet die Verbindungsstrecke OP einfach die Summe der Strecken OA_1, OA_2, ... OA_d. Dabei ist unter „Strecke OA_1“ nicht nur die Länge dieses Geradenstücks, sondern auch seine Richtung zu verstehen, woraus hervorgeht, dafs diese Strecke (Fig. 4) durch irgend eine Strecke A_2P mit der nämlichen Länge und der nämlichen Richtung ersetzt werden kann. Fortbauend auf diesen einfachen Gedanken, der mitunter auch von Bellavitis für die Ebene und den Raum verwertet worden ist, hat Grafsmann schon 1844 sofort eine Theorie der mehrdimensionalen Geometrie geschaffen. Da wir seine Terminologie nicht in Anwendung bringen wollen, so möge es genügen, hier auf sein damals verkanntes, jetzt allgemein hochgeschätztes Werk zu verweisen.

Digitized by Google

24. **Parallele Räume verschiedener Dimensionenzahlen.** In der Stereometrie nennt man eine Gerade g und eine Ebene ε zu einander parallel, wenn der uneigentliche Punkt von g in der uneigentlichen Gerade von ε liegt. Die Verallgemeinerung dieses Gedankens nötigt uns, zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} zu einander parallel zu nennen, wenn von ihren uneigentlichen Räumen U_{d_1-1} und U_{d_2-1} derjenige mit der kleineren Dimensionenzahl ganz im andern enthalten ist. Man hat dann offenbar den Satz:

Es sind zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \lessgtr d_2)$ einander parallel, sobald R_{d_1} einem in R_{d_2} enthaltenen Raume R'_{d_1} parallel ist.

Dabei ist selbstverständlich entweder die perspektive Anschauung des Parallelismus von R_{d_1} und R'_{d_1} anzunehmen oder vorauszusetzen, dafs diese Räume keinen eigentlichen Punkt gemein haben und in einem R_{d_1+1} liegen.

Denkt man sich den Raum U_{d-1} von R_d mittels irgend eines S_u (d) bestimmt, so hat man auch:

Es sind zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$ einander parallel, sobald d_1 durch einen eigentlichen Punkt gehende, nicht in einem R_{d_1-1} liegende Geraden von R_{d_1} parallel sind zu Geraden von R_{d_2}.

Aufgabe 45. In Bezug auf irgend ein gegebenes Koordinatensystem im R_d entsprechen den beiden Symbolen $(x_1, x_2, a_3, a_4, \ldots a_d)$ und $(x_1, x_2, x_3, b_4, \ldots b_d)$, wenn x_1, x_2, x_3 alle möglichen Werte annehmen, die Gröfsen a und b aber unveränderlich sind, eine Ebene und ein Raum, welche einander parallel sind. Weshalb?

Ausdrücklich sei hier noch bemerkt, dafs der Satz[19a], nach welchem zwei Räume R_d und R'_d einander parallel sind, sobald jeder von ihnen einem nämlichen dritten Raume R''_d parallel ist, offenbar auf drei Räume der nämlichen Dimensionenzahl beschränkt bleiben mufs, wie schon das stereometrische Beispiel zweier windschiefer Geraden mit einer zu ihnen parallelen Ebene beweist.

25. **Teilweiser Parallelismus zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2}.** Zwei im Raume R_4 willkürlich angenommene Ebenen haben, wie wir schon in Nr. 14 sahen, einen Punkt gemein; dieser Punkt ist im allgemeinen ein eigentlicher Punkt, denn im uneigentlichen Raume U_3 von R_4 kreuzen

Digitized by Google

sich die unendlich fernen Geraden der Ebenen. Zwischen diesem Falle der allgemeinen Lage, wobei die unendlich fernen Geraden der Ebenen sich kreuzen, und dem Falle des Parallelismus, wobei diese Geraden zusammenfallen, liegt also ein dritter Fall, wo diese Geraden einen Punkt gemein haben. In diesem Zwischenfalle kann man die beiden Ebenen „teilweise parallel" nennen. Allein dieser Ausdruck reicht nicht mehr aus, wenn es zwischen der allgemeinen und der parallelen Lage mehrere von einander zu unterscheidende Zwischenfälle giebt. So haben im Raume R_9 ein R_4 und ein R_5 nach 5) oder 6) im allgemeinen einen eigentlichen Punkt gemein und giebt es also zwischen dieser allgemeinen Lage, wo die uneigentlichen Räume U_3 und U_4 von R_4 und R_5 von einander unabhängig sind, und der parallelen Lage, wo U_3 in U_4 enthalten ist, drei Zwischenfälle, wo U_3 und U_4 der Reihe nach einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene gemein haben. Es empfiehlt sich zu sagen, dafs die Räume R_4 und R_5 in diesen drei Zwischenfällen nach einander ein Viertel, zwei Viertel und drei Viertel parallel sind. Diesen Gedanken verfolgend, belegen wir allgemein den Grad von Parallelismus der Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$, die einen $U_{d_{1,2}}$ gemein haben, mit dem Bruchsymbole $\frac{d_{1,2}+1}{d_1}$, d. h.:

Der Grad von Parallelismus zweier Räume wird angezeigt durch einen Bruch, dessen Nenner der kleinere von den Punktwerten der uneigentlichen Räume beider Räume und dessen Zähler der Punktwert des gemeinschaftlichen uneigentlichen Raumes ist.

Zufolge dieser Bezeichnungsweise sind die zwei Ebenen des Raumes R_4 im oben angeführten Zwischenfalle einander halb parallel.

Aufgabe 46. Was bedeutet ein Parallelismus Null, was ein Parallelismus Eins?

Aufgabe 47. Welches ist in einem gegebenen Raume R_8 der Grad von Parallelismus der Räume R_5 und R_6, welche in Bezug auf irgend ein gegebenes Koordinatensystem durch die zwei Symbole $O\,(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ und $O\,(X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8)$ gekennzeichnet sind?

Natürlich zeigen zwei Räume, die einem dritten Raume teilweise parallel sind, im allgemeinen keinen Parallelismus, auch wenn die drei Räume die gleiche Dimensionenzahl

Digitized by Google

haben [24]). Als Beispiel führen wir zwei im R_4 liegende Ebenen ε_1, ε_2 an, deren uneigentliche Geraden g_1, g_2 die uneigentliche Gerade g einer Ebene ε in *verschiedenen* Punkten schneiden.

Ist die Dimensionenzahl des die Räume R_{d_1} und R_{d_2} enthaltenden Raumes nicht hoch genug, so können sich nicht mehr alle sonst möglichen Fälle von partiellem Parallelismus verwirklichen. So ist z. B. im Raum der Parallelismus Null von zwei Ebenen unmöglich, denn diese Ebenen haben mindestens einen uneigentlichen Punkt gemein und sind also mindestens halb parallel; erst im Raume R_4 können die uneigentlichen Geraden zweier Ebenen sich kreuzen. Mit diesem einfachsten Beispiele wollen wir weder betonen, es sei notwendig, den Satz „Zwei willkürliche Ebenen im Raume sind einander halb parallel“ in die Stereometrie einzuführen, noch behaupten, die Bezeichnungsweise vom partiellen Parallelismus führe zu unsinnigen Resultaten. Denn einerseits offenbart sich das Bedürfnis der Einführung des neuen Begriffs vom *Grade* des Parallelismus erst in der mehrdimensionalen Geometrie, andererseits ist die in der Stereometrie überflüssige Behauptung nicht unsinnig, sondern uns nur fremd. Natürlich hat die Vorausschickung des Beispiels nur den Zweck, das Verständnis der allgemeinen Lageverhältnisse zu erleichtern.

Nachdem in Nr. 21 bewiesen worden ist, dafs irgend ein uneigentlicher Raum U_{d-1} durch d von einander unabhängige Punkte bestimmt ist, führt eine Wiederholung der Überlegungen von Nr. 12 mit lauter unendlich fernen Gebilden zur Überzeugung, dafs auch für diese Gebilde die Formeln 5) und 6) gelten. Und nun lehren diese Formeln in der in Nr. 14 angegebenen Weise, dafs zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} alle Grade von Parallelismus aufweisen können, sobald sie sich befinden in einem Operationsraume R_n, dessen Dimensionenzahl n die Beziehung $d_1 + d_2 < n + 1$ befriedigt.

Aufgabe 48. Welche Grade von Parallelismus können — vergleiche die vorhergehende Aufgabe — die in einem R_8 liegenden Räume R_5 und R_6 zu einander haben?

26. **Die allgemeine Gültigkeit der Formeln 5) bis 9).** Aus den vorhergehenden Entwickelungen kann nun der allgemeine Schlufs abgeleitet werden, dafs ein Raum von d

Digitized by Google

Dimensionen durch ein in ihm enthaltenes $S(d+1)$ eindeutig bestimmt wird, ungeachtet der Zahl der uneigentlichen Eckpunkte dieses Simplex. Daraus ist dann weiter zu folgern, dafs die Formeln 5) bis 9) auch allgemein gültig bleiben, wenn man die uneigentlichen linearen Gebilde in den Kreis der Überlegungen einführt. Deshalb mag hier die am Schlusse der Nr. 18 gemachte Einschränkung aufgehoben werden.

Obgleich die nun allgemein gültigen Formeln 5) bis 9) die verschiedenen zwischen den linearen Gebilden obwaltenden Lageverhältnisse völlig beherrschen, so giebt es doch noch eine Unmasse von relativ einfachen Problemen, welche man mit ausschliefslicher Hilfe dieser Formeln nicht immer angreifen kann. Diese Probleme sind hauptsächlich anzahlgeometrischer Natur. Die einfachsten Beispiele liefert wohl die Stereometrie in den bekannten Sätzen, dafs durch einen gegebenen Punkt eine zwei gegebene Geraden schneidende Gerade geführt werden kann, und vier gegebene Geraden zwei gemeinschaftliche Transversalen besitzen. Und mindestens eben so einfach wie der zweite dieser Sätze ist der Satz, dafs im Raume R_4 drei gegebene Geraden eine gemeinschaftliche Transversale, die Schnittlinie der drei durch diese Geraden zu je zweien bestimmten Räume, zulassen. Indem wir uns vorbehalten, später auf diese Probleme zurückzukommen, sei hier nur ganz allgemein bemerkt, dafs ihre Übertragung auf den uneigentlichen Raum sich bei Problemen über partiellen Parallelismus sehr nützlich zeigen kann, wie die Lösung der drei folgenden Aufgaben lehren wird.

Aufgabe 49. Im Raume R_4 liegen ein Punkt P, eine Gerade g und zwei Ebenen ε und ε' gegeben vor. Zu beweisen, dafs durch P eine zu g parallele und zu ε und ε' halb parallele Ebene gelegt werden kann, und die Konstruktion dieser Ebene anzudeuten.

Aufgabe 50. Im Raume R_4 sind ein Punkt und vier Ebenen willkürlich gegeben. Zu zeigen, dafs durch den gegebenen Punkt zwei zu den vier gegebenen Ebenen halb parallele Ebenen geführt werden können.

Aufgabe 51. Im Raume R_5 sind ein Punkt und drei Ebenen willkürlich gegeben. Zu beweisen, dafs durch diesen Punkt eine zu diesen drei Ebenen halb parallele Ebene hindurchgeht, und die Konstruktion dieser Ebene zu skizzieren.

Digitized by Google

27. **Kritischer Rückblick.** An den bekannten Satz der Stereometrie, nach welchem zwei Ebenen ε und ε' sich in einer Gerade schneiden, sobald sie einen eigentlichen Punkt O gemein haben, knüpfen wir eine Bemerkung über das hier befolgte Beweisverfahren an.

Gewöhnlich wird der Beweis des Satzes folgendermafsen geführt. Es teilt die Ebene ε den Raum in zwei verschiedene Teile R und R'. Deshalb befindet sich von irgend zwei in ε' durch O hindurchgehenden Geraden g, h ein Teil GO, HO in R, ein anderer Teil OG', OH' in R'. Verbindet man nun irgend einen Punkt P des Teiles GO von g mit irgend einem Punkte P' des Teiles OH' von h', so liegt von dieser Gerade PP' von ε' der Punkt P in R und der Punkt P' in R', und mufs es also auf ihr zwischen P und P' einen in ε liegenden Punkt Q geben, der von O verschieden ist und eine ε und ε' gemeinschaftliche Gerade OQ bestimmt.

Nach den hier gegebenen Betrachtungen gelangen wir auf folgende Weise zum nämlichen Resultate. Wir setzen voraus, dafs die im Raume liegenden Ebenen ε, ε' aufser O keinen Punkt gemein hätten. Dies ist aber unmöglich. Denn, wenn ε und ε' nur den Punkt O gemein hätten, so würden zwei willkürliche Punkte von ε und zwei willkürliche Punkte von ε' mit O fünf von einander unabhängige Punkte darstellen, was sich nicht vereinigen läfst mit der Thatsache, dafs ε und ε' in einem Raume liegen. Oder aber, wenn die Gröfsen w_1, w_2, $w_{1,2}$ von 5) der Reihe nach die Werte 3, 3, 1 annehmen, so findet man $w = 5$.

Man könnte nun meinen, der stereometrische Beweis besitze, dem unserer Formel 5) entnommenen Beweise gegenüber, wirkliche Vorteile. Allein wir können diese Meinung nicht unterschreiben, obgleich zugegeben werden mufs, dafs es keinen Zweck haben würde, für die Stereometrie an und für sich die Formel 5) herbeizuziehen. Erstens ist der aus Formel 5) abgeleitete Beweis nur dem Scheine nach weniger geometrisch als der stereometrische, wie die Abzählung der fünf Punkte, welche der rechten Seite der Gleichung entsprechen, zeigt. Dann ist die Aussage, dafs eine eigentliche Ebene den Raum in zwei Teile zerlegt, nicht völlig im Einklang mit der perspektiven Anschauung. Denn diese Anschauung verlangt, dafs man jede Gerade als eine von ihrem uneigentlichen Punkte geschlossene Linie betrachte, woraus

Digitized by Google

folgt, dafs man im Raume von der einen Seite irgend einer Ebene zur anderen gelangen kann, ohne die Ebene zu durchsetzen. Und endlich, hat man bei der Verallgemeinerung des stereometrischen Beweises auf den Fall, dafs im Raume R_d eine Ebene ε und ein Raum R_{d-m} mit gemeinschaftlichem eigentlichem Punkte O gegeben vorliegt, klar eingesehen, dafs ein Raum R_d zwar von jedem in ihm enthaltenen Raume R_{d-1}, aber nicht von linearen Räumen niedrigerer Dimensionenzahl in zwei Teile zerlegt wird, und also gezeigt, dafs sich nur für $m = 1$ eine gemeinschaftliche Gerade vorfindet, so mufs man, um sich zur Tragweite der Formel 5) emporzuheben, doch von mit dem Simplex sehr nahe verwandten Betrachtungen Gebrauch machen. Für diesen Gedankengang, der schliefslich natürlich auch mit der Gestalt der Formel 5) bis 9) verwachsen ist, verweisen wir auf W. Killing's „*Einführung in die Grundlagen der Geometrie*" (Paderborn, F. Schöningh, 1893 und 1898), Teil I, S. 218 ff.

Aufgabe 52. Wie beweist man die Behauptung bezüglich der Teilung des Raumes R_d?

[Die Grenzen von Flächen sind Linien, u. s. w.]

28. **Übersicht der Lageverhältnisse zweier linearer Gebilde in den verschiedenen Räumen.** Deutet man abkürzend mit den Symbolen $(0, k)$ und (i, k) die Reihenfolgen

$$(\overline{R}_0, \overline{R}_1, \overline{U}_1, \overline{R}_2, \overline{U}_2, \ldots \overline{R}_{k-1}, \overline{U}_{k-1}, \overline{R}_k),$$

$$(\overline{R}_i, \overline{U}_i, \overline{R}_{i+1}, \overline{U}_{i+1}, \ldots \overline{R}_{k-1}, \overline{U}_{k-1}, \overline{R}_k)$$

von durch ihren Punktwert gekennzeichneten Räumen an und hängt man weiter diesen Symbolen die Zahlen $2k$ und $2(k-i)+1$ der von ihnen versinnlichten Räume als Index an, so dafs z. B. $(0, 2)_4$ und $(1, 3)_5$ Abkürzungen sind von $(\overline{R}_0, \overline{R}_1, \overline{U}_1, \overline{R}_2)$ und $(\overline{R}_1, \overline{U}_1, \overline{R}_2, \overline{U}_2, \overline{R}_3)$, so geben die folgenden zwei kleinen Tabellen mit doppeltem Eingange je im R_4 und R_5 alle überhaupt möglichen Lageverhältnisse von zwei linearen Räumen an.

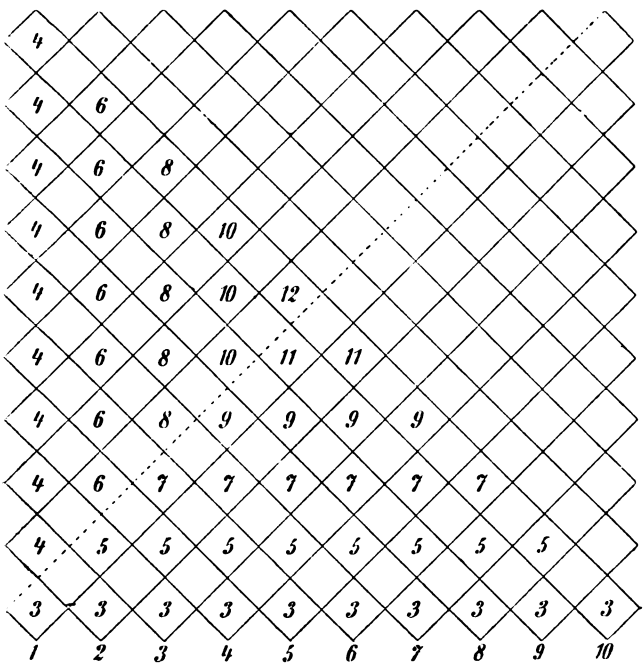
		Gerade	Ebene	Raum
Im Raume R_4 ...	Gerade	$(0, 2)_4$		
	Ebene	$(0, 2)_4$	$(1, 3)_5$	
	Raum	$(1, 2)_3$	$(2, 3)_3$	$(3, 4)_3$

Digitized by Google

Im R_5 ...

	Gerade	Ebene	Raum	R_4
Gerade	$(0,2)_4$			
Ebene	$(0,2)_4$	$(0,3)_6$		
Raum	$(0,2)_4$	$(1,3)_5$	$(2,4)_5$	
R_4	$(1,2)_3$	$(2,3)_3$	$(3,4)_3$	$(4,5)_3$

Wie man unmittelbar einsieht, giebt z. B. in der zweiten Tabelle das in der Kolonne der Ebene und in der Zeile des Raumes liegende Symbol $(1,3)_5$ an, dafs eine Ebene und ein Raum im R_5 mit einander eins der fünf Gebilde $\overline{R}_1, \overline{U}_1, \overline{R}_2, \overline{U}_2, \overline{R}_3$ gemein haben können. Dabei ist dann noch der Fall eines gemeinschaftlichen Gebildes $\overline{U}_3$, welcher nur eintreten kann, wenn die gegebene Ebene eine uneigentliche Ebene ist, beiseite gelassen, da nur an die



Digitized by Google

Lageverhältnisse von zwei eigentlichen linearen Gebilden gedacht worden ist.

Läfst man die Randbeischriften beiseite, so führt Unterdrückung der Hauptdiagonale der zweiten Tabelle zur ersten zurück. Es liegt also der Gedanke nahe, alle Resultate von der Ebene an bis z. B. R_{10} inklusive in einer Tabelle zu vereinigen. Wir verwirklichen diesen Gedanken — siehe die grofse Tabelle der vorhergehenden Seite — nur in Bezug auf die oben durch die Indices angegebenen Anzahlen.

Für jedes aus dieser Tabelle abzuleitende rechtwinklige Dreieck mit immer zur Hauptdiagonale paralleler Hypotenuse deutet die am untern Ende dieser Hypotenuse stehende Ziffer die Dimensionenzahl des entsprechenden Raumes an.

Aufgabe 53. Was bedeutet die auf der Hauptdiagonale senkrecht stehende punktierte Gerade?

[Man findet links oben von dieser Linie die Fälle, bei denen die Dimensionenzahl des die Gebilde enthaltenden Raumes hoch genug ist, alle in Hinsicht des Parallelismus verschiedenen Lageverhältnisse zuzulassen.]

Aufgabe 54. Es sind die Zahlen der im $R_2, R_3, R_4, R_5, \ldots$ überhaupt möglichen Fälle nach einander 3, 10, 22, 40, ... Beweise, dafs es im R_n im allgemeinen $\frac{n(n-1)(n+7)}{6}$ mögliche Fälle giebt.

[Die Zahl der im R_n möglichen Fälle ist

$$1(n+1)+2(n)+3(n-1)+\ldots+(n-1)3.]$$

§ 3. Orthogonalität.

29. **Der Hauptsatz der Orthogonalität.** In der Stereometrie wird bekanntlich bewiesen, dafs eine Gerade g_0, welche im Punkte O senkrecht steht auf zwei durch O hindurchgehenden Geraden g_1 und g_2, auch senkrecht steht auf jeder durch O gehenden Gerade g der durch g_1 und g_2 bestimmten Ebene. Dieser Satz behält in der mehrdimensionalen Geometrie seine Gültigkeit bei; denn durch die drei Geraden g_0, g_1, g_2, welche den Punkt O gemein haben ohne in einer Ebene zu liegen, ist immer ein Raum bestimmt.

Digitized by Google

Aufgabe 55. Weshalb liegen die Geraden g_0, g_1, g_2 nicht in einer Ebene?

Mit Hilfe des soeben angeführten Satzes der Stereometrie beweist man ohne weiteres den für den Raum R_d geltenden Hauptsatz:

Steht eine Gerade g_0 im Punkte O senkrecht auf $d-1$ durch O hindurchgehenden Geraden g_1, g_2, $\cdots$ g_{d-1} eines gegebenen Raumes R_{d-1}, welche nicht in einem R_{d-2} liegen, so steht diese Gerade g_0 auch senkrecht auf irgend einer durch O gehenden Gerade g dieses Raumes R_{d-1}.

Zum Beweise dieses allgemeinen Satzes hat man den Satz der Stereometrie nur $(d-2)$-mal nach einander anzuwenden. Ist nämlich nach einander 1° g_1' die Schnittgerade der Ebene (g, g_1) mit dem Raume $R_{d-2} = (g_2, g_3, \cdots g_{d-1})$, die beide im Raume $R_{d-1} = (g_1, g_2, \cdots g_{d-1})$ liegen, 2° g_2' die Schnittgerade der Ebene (g_1', g_2) mit dem Raume $R_{d-3} = (g_3, g_4, \cdots g_{d-1})$, die beide im Raume $R_{d-2} = (g_2, g_3, \cdots g_{d-1})$ liegen, u. s. w. und endlich g'_{d-3} die Schnittgerade der Ebenen (g'_{d-4}, g_{d-3}), (g_{d-2}, g_{d-1}), die beide im Raume $(g_{d-3}, g_{d-2}, g_{d-1})$ liegen, so bilden

$$(g, g_1, g_1'),\ (g_1', g_2, g_2'),\ \cdots\ (g'_{d-4}, g_{d-3}, g'_{d-3}),$$
$$(g'_{d-3}, g_{d-2}, g_{d-1})$$

eine Reihe von $d-2$ an einander geketteten, in Ebenen liegenden Geradentripeln, und ist dem Hilfssatze gemäfs nun rückwärts schreitend 1° g'_{d-3} senkrecht auf g_0, weil g_{d-2} und g_{d-1} es sind, 2° g'_{d-4} senkrecht auf g_0, weil g_{d-3} und g'_{d-3} es sind, u. s. w. und endlich g senkrecht auf g_0, weil g_1 und g_1' es sind.

[Wenn man sich erinnert, welcher Apparat von kongruenten Dreiecken für die Beweisführung des stereometrischen Hilfssatzes erforderlich ist, so wird man dankbar anerkennen, dafs die Mühseligkeiten der mehrdimensionalen Beweise zwar häufig, doch nicht immer, mit der Dimensionenzahl bedeutend wachsen.]

Aufgabe 56. Beweise den Hauptsatz für den Fall $d=4$ mittels Verallgemeinerung des stereometrischen Beweises (Fig. 6), wobei aus den gegebenen Beziehungen $OP = OP'$ und $A_iP = A_iP'$ $(i=1,2,3)$ der Schlufs $AP = AP'$

Digitized by Google

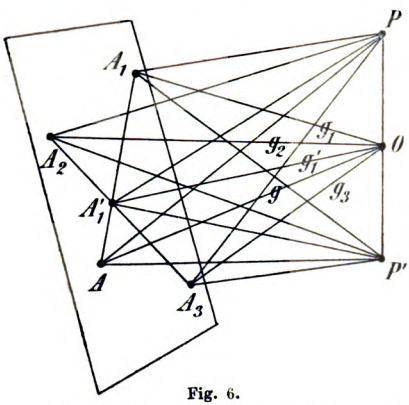


Fig. 6.

gezogen werden mufs, und zeige, dafs dieser scheinbar neue Beweis doch wieder zu der zweigliedrigen Kette (g, g_1, g_1'), (g_1', g_2, g_3) von in Ebenen liegenden Geradentripeln zurückführt.

Ersetzt man d durch n, so erhält man die dem Operationsraume R_n entsprechende Form des Hauptsatzes.

30. **Erste Verallgemeinerung des Hauptsatzes.** Man findet nun auch sofort den folgenden allgemeineren Satz:

Steht von zwei Gruppen von Geraden durch O jede Gerade der ersten Gruppe senkrecht auf jeder Gerade der zweiten Gruppe, und bestimmen die d_1 Geraden der ersten Gruppe einen Raum R_{d_1}, die d_2 Geraden der zweiten Gruppe einen Raum R_{d_2}, so steht jede durch O gehende Gerade des Raumes R_{d_1} senkrecht auf jeder durch O gehenden Gerade des Raumes R_{d_2}.

Dem zuletzt bewiesenen Satze zufolge steht nämlich jede Gerade der zweiten Gruppe senkrecht auf irgend einer Gerade g_1 des Raumes R_{d_1}, weil sie auf allen Geraden der ersten Gruppe senkrecht steht. Deshalb steht diese Gerade g_1 von R_{d_1} umgekehrt auch senkrecht auf allen Geraden der zweiten Gruppe und also auch auf irgend einer Gerade g_2 von R_{d_2}.

Weil eine Gerade mit sich selbst entweder einen Winkel Null oder einen gestreckten Winkel, niemals aber einen rechten Winkel bildet, so können die Räume R_{d_1} und R_{d_2} keine Gerade mit einander gemein haben. Also bestimmen die sich in O schneidenden Räume R_{d_1} und R_{d_2} einen Raum $R_{d_1+d_2}$. Ist $d_1 + d_2 = n$ und der Raum $R_{d_1+d_2}$ also der Operationsraum R_n, so können die im verallgemeinerten Hauptsatze genannten Räume als R_{d_1} und R_{n-d_1} bezeichnet werden.

Aufgabe 57. Wäre es nicht vorsichtiger, zu behaupten, dafs eine „reelle" Gerade nicht senkrecht auf sich selbst stehen kann?

31. **Die Orthogonalität eine Beziehung zwischen uneigentlichen Elementen. Zweite Verallgemeinerung**

Digitized by Google

des Hauptsatzes. Wenn die Schenkel $O'A'$ und $O'B'$ (Fig. 7) eines Winkels α' den Schenkeln OA und OB eines Winkels α parallel sind und im nämlichen Sinne verlaufen, so sind die Winkel α und α' einander gleich.

Dieser bekannte stereometrische Satz gilt auch in der mehrdimensionalen Geometrie. Denn auch dort sind die Ebenen ε und ε' der beiden Winkel einander parallel; deshalb bestimmen die gemeinschaftliche uneigentliche Gerade dieser Ebenen und die Verbindungsgerade OO' der beiden Scheitel einen die Winkel enthaltenden Raum, in welchem der stereometrische Satz zur Anwendung kommen kann. Man kann also in der mehrdimensionalen Geometrie, eben so gut wie in der Stereometrie, vom Winkel zweier zu einander windschiefer Geraden sprechen, indem man darunter den Winkel versteht, welcher erhalten wird, wenn man durch irgend einen Punkt zu den gegebenen Geraden parallele Geraden legt. Nennt man die uneigentlichen Punkte zweier zu einander senkrechter Geraden, gleichgültig ob sie sich senkrecht schneiden oder senkrecht kreuzen, einander „senkrecht zugeordnet", so nimmt der Hauptsatz die folgende nochmals verallgemeinerte Form an:

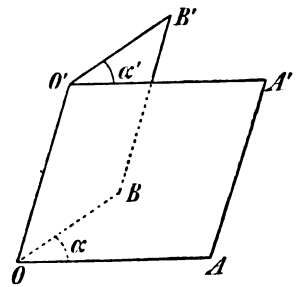


Fig. 7.

Jede Gerade g_1 eines Raumes R_{d_1} ist senkrecht zu jeder Gerade g_2 eines Raumes R_{d_2}, sobald die Eckpunkte eines Simplex $S_u(d_1)$ des uneigentlichen Raumes U_{d_1-1} von R_{d_1} den Eckpunkten eines Simplex $S_u(d_2)$ des uneigentlichen Raumes U_{d_2-1} von R_{d_2} senkrecht zugeordnet sind.

Obgleich noch nicht gezeigt worden ist, ob und wie man zwei uneigentliche Räume U_{d_1-1} und U_{d_2-1} erhalten kann, zwischen welchen die im Satze angegebene gegenseitige Beziehung obwaltet, so wollen wir doch zwei solche uneigentliche Räume sofort einander „senkrecht zugeordnet" und irgend ein Paar sie enthaltende Räume R_{d_1} und R_{d_2} zu einander senkrecht nennen.

Weil zwei zu einander senkrechte Räume R_{d_1} und R_{d_2} keine Gerade gemein haben können[30a], so haben sie ent-

Digitized by Google

weder einen einzigen Punkt oder gar nichts mit einander gemein. Wir sagen im ersten Falle, dafs sie „sich senkrecht schneiden“ oder „senkrecht zu einander sind“, im zweiten Falle, dafs sie „sich senkrecht kreuzen“. Nach 5) werden also zwei zu einander senkrechte Räume R_{d_1} und R_{d_2} entweder einen Raum $R_{d_1+d_2}$ oder einen Raum $R_{d_1+d_2+1}$ bestimmen, je nachdem sie sich senkrecht schneiden oder kreuzen.

32. **Konstruktion des durch einen gegebenen Punkt gehenden zu einer gegebenen Gerade senkrechten Raumes R_{n-1}.** Liegt der gegebene Punkt O zunächst *auf* der gegebenen Gerade OP, und bilden die $n-1$ Punkte A_1, A_2, ... A_{n-1} mit O und P die Eckpunkte eines $S(n+1)$, so liegen die $n-1$ Ebenen OPA_i $(i=1, 2, \ldots n-1)$ offenbar nicht in einem Raume R_{n-1}. Errichtet man nun in O auf OP in jeder dieser $n-1$ Ebenen OPA_i ein Lot OB_i, so werden diese $n-1$ neuen Geraden OB_i also nicht in einem R_{n-2} liegen können, und bestimmen sie deshalb einen durch O gehenden Raum R_{n-1}, auf welchem OP im Punkte O senkrecht steht, weil OP senkrecht ist zu den $n-1$ diesen Raum R_{n-1} bestimmenden Geraden OB_i. Und liegt zweitens der gegebene Punkt O' *aufserhalb* der gegebenen Gerade OP, so kann zunächst für O die gegebene Konstruktion angewendet und nachher durch O' ein Raum R_{n-1} parallel zu dem schon erhaltenen gelegt werden.

Aus dieser Konstruktion folgt unmittelbar, dafs es immer einen *einzigen* Raum R_{n-1} giebt, senkrecht zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt. Denn gäbe es zwei im Punkte O senkrecht auf OP stehende Räume R_{n-1}, und wäre Q ein nicht im einen Raume enthaltener Punkt des andern, so würde — was offenbar unmöglich ist — die Ebene OPQ zwei in O auf OP errichtete Lote enthalten, die von einander verschiedenen Schnittgeraden dieser Ebene mit jenen beiden Räumen R_{n-1}. Und dem einzigen senkrechten Raume R_{n-1} durch O ist ein einziger durch O' gehender Raum R_{n-1} parallel. Oder aber, man kann den Schlufs, dafs es in beiden Fällen nur einen durch den gegebenen Punkt gehenden senkrechten Raum R_{n-1} giebt, auch folgendermafsen ziehen. Es bestimmt im uneigentlichen Raume U_{n-1} des Operationsraumes R_n der uneigentliche Punkt der gegebenen Gerade den Ort der diesem Punkte

Digitized by Google

senkrecht zugeordneten Punkte *eindeutig* und durch diesen Ort U_{n-2} und irgend einen eigentlichen Punkt geht nur ein Raum R_{n-1} hindurch.

33. **Konstruktion des durch einen gegebenen Punkt gehenden zu einem gegebenen Raume R_d senkrechten Raumes R_{n-d}.** Liegt der gegebene Punkt O zunächst *im* gegebenen Raume R_d und sind die d Geraden OP_1, OP_2, ... OP_d so gewählt, dafs sie zusammen den Raum R_d bestimmen, so kann man sich die d Räume R_{n-1} konstruiert denken, welche im Punkte O senkrecht zu diesen Geraden sind. Diese d Räume R_{n-1} durch O haben nach den Überlegungen, welche zu der Formel 9) geführt haben, mindestens einen Raum R_{n-d} mit einander gemein. Da aber irgend eine durch O gehende Gerade dieses gemeinschaftlichen Raumes R_{n-d} in O senkrecht steht auf den d Geraden $OP_i (i = 1, 2, \ldots d)$ und also auch auf dem durch diese Geraden bestimmten gegebenen Raum R_d, so können die d Räume R_{n-1} aufserhalb des gefundenen Raumes R_{n-d} keinen Punkt mit einander gemein haben; denn sonst würde durch O ein Raum R_{n-d+1} senkrecht auf R_d anzubringen sein, was unmöglich ist [31b]. Und hat man es wieder mit dem Falle zu thun, dafs der gegebene Punkt *aufserhalb* des gegebenen Raumes R_d liegt, oder will man zeigen, dafs der gefundene Raum R_{n-d} in beiden Fällen einzig ist, so verfahre man wie in Nr. 32. Natürlich kann auch hier zum letztgenannten Ziele die Bemerkung führen, dafs im uneigentlichen Raume U_{n-1} zwei einander senkrecht zugeordnete Räume U_{d-1} und U_{n-d-1} sich gegenseitig *eindeutig* bestimmen.

34. **Haupteigenschaft zweier einander senkrecht zugeordneter uneigentlicher Räume.** Nachdem bewiesen worden ist, dafs es zu einander senkrechte Räume R_d und R_{n-d} giebt, wollen wir der Haupteigenschaft ihrer sich gegenseitig eindeutig bestimmenden uneigentlichen Räume U_{d-1} und U_{n-d-1}, welche wir der Kürze halber künftig als $\overline{U}_d$ und $\overline{U}_{n-d}$ bezeichnen, Erwähnung thun. Wir geben diese Eigenschaft in der folgenden allgemeinen Form:

Sind $\overline{U}_d$ und $\overline{U}_{n-d}$ einander senkrecht zugeordnet, ist dies auch mit $\overline{U}_{d'}$ und $\overline{U}_{n-d'}$ der Fall, und liegt $\overline{U}_{d'}$ in $\overline{U}_d$, so liegt auch $\overline{U}_{n-d}$ in $\overline{U}_{n-d'}$.

Digitized by Google

Der Beweis ist äufserst einfach. Nach der Definition von zwei einander senkrecht zugeordneten uneigentlichen Räumen ist nämlich, wenn $\bar{U}_{d'}$ in $\bar{U}_d$ liegt, jeder Punkt von $\bar{U}_{d'}$ jedem Punkte von $\bar{U}_{n-d}$ senkrecht zugeordnet und mufs also nach der nämlichen Definition der dem $\bar{U}_{d'}$ senkrecht zugeordnete Raum $\bar{U}_{n-d'}$ den Raum $\bar{U}_{n-d}$ enthalten.

Für $d = n - 1$ und $d' = 1$ erhält man speziell:

Geht der dem Punkte $\bar{U}_1$ senkrecht zugeordnete Raum durch den Punkt $\bar{U}_1'$, so geht auch umgekehrt der dem Punkt $\bar{U}_1'$ senkrecht zugeordnete Raum durch den Punkt $\bar{U}_1$.

Die Verwandtschaft zwischen den einander senkrecht zugeordneten uneigentlichen Räumen wird im siebenten Paragraphen näher qualifiziert werden.

Aufgabe 58. An welche Theorie bei den Kegelschnitten und den Flächen zweiter Ordnung erinnert der letzte Satz?

Aufgabe 59. Wie grofs ist nach der gemeinschaftlichen Voraussetzung der Aufgaben 2—6, 9—16 die Zahl der im $\bar{U}_n$ enthaltenen Räume $\bar{U}_{n-1}$?

[Diese Zahl ist entsprechend der eindeutigen Beziehung zwischen zwei einander senkrecht zugeordneten Räumen $\bar{U}$ der Zahl der Punkte von $\bar{U}_n$ gleich.]

35. **Das rechtwinklige Koordinatensystem.** Legt man durch den willkürlich gewählten Punkt O eine willkürliche Gerade OX_1 und nimmt man sodann nach einander im Raume R_{n-1} durch O senkrecht auf OX_1 die Gerade OX_2, im Raume R_{n-2} durch O senkrecht auf der Ebene $O(X_1, X_2)$ die Gerade OX_3, u. s. w. und endlich in der Ebene durch O senkrecht auf dem Raume $O(X_1, X_2, \ldots X_{n-2})$ die senkrecht auf einander stehenden Geraden OX_{n-1} und OX_n willkürlich an, so erhält man ein System von n Geraden OX_i $(i = 1, 2, \ldots . n)$, die sich gegenseitig zu je zweien in O senkrecht schneiden. Diese Geraden mit den sie zu je zweien verbindenden Ebenen, zu je dreien verbindenden Räumen, u. s. w. und zu je $n - 1$ verbindenden Räumen R_{n-1} bilden also die Achsen, Ebenen, Räume, u. s. w. eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

Aufgabe 60. Welche ist, der Voraussetzung der vor-

Digitized by Google

hergehenden Aufgabe gemäfs, die Zahl der rechtwinkligen Koordinatensysteme mit gegebenem Ursprunge O?

[Man findet $\frac{(m^n-1)(m^{n-1}-1)\dots(m^2-1)}{n!\,(m-1)^{n-1}}$.]

Aufgabe 61. Beweise, dafs die Zahl dieser Koordinatensysteme $\frac{1}{2}n(n-1)$-fach unendlich ist.

Nach der Entstehungsweise dieses Koordinatensystems steht der durch d der Achsen bestimmte Raum R_d in O senkrecht auf dem durch die $n-d$ übrigen Achsen bestimmten Raume R_{n-d}. Denn[30b] die d den R_d bestimmenden Achsen stehen alle senkrecht auf den $n-d$ den R_{n-d} bestimmenden. Oder aber, zerlegt man die uneigentlichen Punkte der n Achsen eines rechtwinkligen Systems auf irgend eine Weise in zwei Gruppen von d und $n-d$ Punkten, so erhält man die Eckpunkte von zwei S_u, einem $S_u(d)$ und einem $S_u(n-d)$, welche immer zwei einander senkrecht zugeordnete uneigentliche Räume bestimmen[31b]. Deshalb möge das durch diese n Punkte gebildete $S_u(n)$, zur Andeutung dieser besondern Eigenschaft, ein *Lotvieleck* heifsen.

Aufgabe 62. Welchen Namen trägt dieses Vieleck in der Theorie, auf welche wir in der Aufgabe 58 hindeuteten?

36. **Zu einander senkrechte Räume R_{d_1} und R_{d_2} ($d_1+d_2\neq n$). Teilweise Orthogonalität.** Der Fall $d_1+d_2<n$ kann unmittelbar beseitigt werden. Nimmt man im Operationsraume R_n nämlich irgend einen Raum R_d ($d<n$) willkürlich an, so kann man — diesen R_d einen Augenblick als Operationsraum betrachtend — in ihm zwei zu einander senkrechte Räume R_{d_1} und R_{d_2} ($d_1+d_2=d$) bestimmen[33]. Dann müssen diese Räume R_{d_1} und R_{d_2} natürlich auch im R_n als senkrecht zu einander gelten, denn zwischen ihnen besteht die in der Definition[31b] geforderte Beziehung. Andererseits kann der Fall $d_1+d_2>n$ sich nicht ereignen, wenn man will, dafs *jede* Gerade von R_{d_1} senkrecht sei zu *jeder* Gerade von R_{d_2}; denn zwei solche Räume R_{d_1} und R_{d_2} bestimmen[31b] entweder einen $R_{d_1+d_2}$ oder einen $R_{d_1+d_2+1}$ und können also für $n<d_1+d_2$ in unserm R_n nicht vorkommen.

Wenn nun hervorgehoben wird, dafs man in der Stereometrie ($n=3$) dennoch von zwei zu einander senkrechten

Digitized by Google

Ebenen ($d_1 + d_2 = 4$) spricht, so muſs sofort bemerkt werden, daſs man es hier mit einer andern Art von Orthogonalität zu thun hat; es fällt ja doch niemand ein, nur einen Augenblick zu meinen, daſs hier *jede* Gerade der einen Ebene senkrecht sei zu *jeder* Gerade der andern. Bekanntlich nennt man in der Stereometrie zwei Ebenen senkrecht zu einander, sobald zwischen ihnen die Wechselbeziehung besteht, daſs jede der beiden Ebenen den gemeinschaftlichen uneigentlichen Punkt aller Normalen der andern enthält, welche neue Definition von der allgemeinen hier[314] gegebenen verschieden ist.

Wie haben wir uns hier dieser Auffassung der Stereometrie gegenüber zu verhalten? Natürlich kann man auch in der mehrdimensionalen Geometrie die zwei verschiedenen Definitionen der Orthogonalität neben einander zur Geltung bringen, indem man R_{d_1} und R_{d_2} mit den uneigentlichen Räumen $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ und den diesen senkrecht zugeordneten Räumen $\overline{U}_{n-d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$ zu einander senkrecht nennt 1° für $d_1 + d_2 < n$, wenn $\overline{U}_{d_1}$ in $\overline{U}_{n-d_2}$ und also auch[314a] $\overline{U}_{d_2}$ in $\overline{U}_{n-d_1}$ liegt, 2° für $d_1 + d_2 = n$, wenn $\overline{U}_{d_1}$ mit $\overline{U}_{n-d_2}$ und also auch $\overline{U}_{d_2}$ mit $\overline{U}_{n-d_1}$ zusammenfällt, 3° für $d_1 + d_2 > n$, wenn $\overline{U}_{d_1}$ durch $\overline{U}_{n-d_2}$ und also auch $\overline{U}_{d_2}$ durch $\overline{U}_{n-d_1}$ hindurchgeht; welche drei Fälle zusammengefaſst werden können in der Aussage, daſs R_{d_1} und R_{d_2} zu einander senkrecht sind, wenn ihre Räume $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$ und also auch ihre Räume $\overline{U}_{n-d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ in einander liegen. Allein, wie nahe der Vollkommenheit diese Verallgemeinerung der stereometrischen Anschauung in letzterer kurzen Fassung auch scheinen möge, in Wirklichkeit ist sie noch weit davon entfernt. Ist es doch gewiſs ein bedeutender Nachteil dieser Definition, daſs sie uns bisweilen nötigt, die zwei nämlichen Gebilde in der nämlichen Lage zu einander das eine Mal senkrecht, das andere Mal nicht senkrecht zu einander zu nennen, je nachdem man sie sich in dem durch sie bestimmten Raume oder in einem Raume mit gröſserer Dimensionenzahl liegend denkt. Nach ihr sind z. B. zwei zu einander senkrechte Ebenen der Stereometrie nicht zu einander senkrecht im Raume R_4. Wir haben uns hier also nach einem andern Begriffe umzusehen.

Digitized by Google

Von zwei im R_4 liegenden Ebenen ε_1 und ε_2 können die uneigentlichen Geraden g_1 und g_2 rücksichtlich der Orthogonalität drei verschiedene Lageverhältnisse aufweisen; es kann nämlich g_1 entweder keinen, oder einen einzigen Punkt, oder aber zwei und also unendlich viele Punkte enthalten, welche allen Punkten von g_2 senkrecht zugeordnet sind. Oder mit andern Worten: ist sowohl (g_1, g'_1) wie (g_2, g'_2) ein Paar einander senkrecht zugeordneter uneigentlicher Geraden, so können (g_1, g'_2) und deshalb auch[34a] (g'_1, g_2) entweder Paare sich kreuzender, oder Paare sich schneidender, oder aber Paare zusammenfallender Geraden sein. Im letzten Falle sind ε_1 und ε_2 offenbar senkrecht zu einander. Und indem diese Ebenen im ersten Falle eine in Bezug auf die Orthogonalität ganz willkürliche Lage zu einander haben, so nennen wir sie im mittlern Falle einander teilweise orthogonal. Allein auch hier reicht dieser Ausdruck nicht mehr aus, wenn es zwischen der allgemeinen Lage und der Orthogonalität mehrere von einander zu unterscheidende Zwischenfälle giebt. So mufs man bei den gegebenen Räumen R_4 und R_m $(m > 3)$ mit den uneigentlichen Räumen $\bar{U}_4$ und $\bar{U}_m$ in Bezug auf die Orthogonalität im ganzen fünf Fälle unterscheiden, in denen $\bar{U}_4$ respektive die Örter $\bar{U}_0$, $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$, $\bar{U}_4$ von Punkten enthält, welche allen Punkten von $\bar{U}_m$ senkrecht zugeordnet sind. In den drei Zwischenfällen sind die Räume R_4 und R_m $(m > 3)$ dann wieder als ein Viertel, zwei Viertel, drei Viertel senkrecht zu einander zu betrachten. Auf diese Weise kommt man leicht zur folgenden Definition:

Der Orthogonalitätsgrad zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} — $(d_1 < d_2 + 1)$ — wird angezeigt durch einen Bruch, dessen Nenner der kleinere d_1 von den Punktwerten der uneigentlichen Räume $\bar{U}_{d_1}$ und $\bar{U}_{d_2}$ beider Räume ist, und dessen Zähler den Punktwert m des im $\bar{U}_{d_1}$ enthaltenen Ortes $\bar{U}_m$ des allen Punkten von $\bar{U}_{d_2}$ senkrecht zugeordneten Punktes P_∞ angiebt.

Nach dieser Bezeichnungsweise, die ganz allgemein und von der Dimensionenzahl des Raumes, in dem man sich die beiden Räume R_{d_1} und R_{d_2} denkt, unabhängig ist, sind die zu einander senkrechten Ebenen der Stereometrie künftig als einander halb senkrecht zu betrachten; sie sind also zu

Digitized by Google

gleicher Zeit — vergleiche Nr. 25 — halb parallel und halb senkrecht zu einander.

Aufgabe 63. In Bezug auf ein im R_4 gegebenes rechtwinkliges Koordinatensystem entsprechen den beiden Symbolen (x_1, x_2, a_3, a_4) und (x_1, b_2, x_3, b_4) — vergleiche für die Bezeichnung Aufgabe 45 — zwei Ebenen. Beweise, dafs diese Ebenen halb parallel und halb senkrecht zu einander sind. Unter welcher Bedingung liegen sie in einem Raume?

Aufgabe 64. Welche Lage haben dagegen die beiden Ebenen (x_1, x_2, a_3, a_4) und (a_1, a_2, x_3, x_4) zu einander? Und welchen Punkt haben diese Ebenen mit einander gemein?

Aufgabe 65. Im Raume R_4 sind ein Punkt und zwei Ebenen willkürlich gegeben. Zu zeigen — vergleiche Nr. 26 und Aufgabe 50 —, dafs durch diesen Punkt zwei zu diesen Ebenen sowohl halb parallele wie halb senkrechte Ebenen geführt werden können.

[Die uneigentliche Gerade jeder den Bedingungen Genüge leistenden Ebene mufs die uneigentlichen Geraden g_1 und g_2 der gegebenen Ebenen und die diesen Geraden senkrecht zugeordneten Geraden g'_1 und g'_2 schneiden.]

Aufgabe 66. Im Raume R_5 sind ein Punkt und drei Räume gegeben. Zu beweisen — vergleiche Nr. 26 und Aufgabe 51 —, dafs durch diesen Punkt eine zu diesen drei Räumen halb senkrechte Ebene hindurchgeht, und die Konstruktion dieser Ebene zu skizzieren.

Wir bemerken ausdrücklich, dafs die oben (31$_5$) erwähnte Wahrheit, welche aussagt, dafs zwei zu einander senkrechte Räume entweder nichts oder einen einzigen Punkt mit einander gemein haben, nur für *ganze* Orthogonalität gilt, und der hiermit zusammenhängende Satz, den durch zwei senkrechte Räume bestimmten Raum betreffend, also der nämlichen Beschränkung unterworfen bleibt. Und wir fügen, diese Resultate verallgemeinernd, jetzt noch hinzu, dafs zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 < d_2 + 1)$ mit dem Orthogonalitätsgrade $\frac{m}{d_1}$ einen Raum von höchstens $d_1 - m$ Dimensionen gemein haben und einen Raum von mindestens $d_2 + m$ und

Digitized by Google

höchstens $d_1 + d_2 + 1$ Dimensionen bestimmen können. Diese Ergebnisse, welche der Formel 5) Genüge leisten, werden sofort erhalten, wenn man bedenkt, dafs der Ort $\overline{U}_m$, der Definition der teilweisen Orthogonalität gemäfs, gewifs aufserhalb $\overline{U}_{d_2}$ liegt und $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ deshalb höchstens einen $\overline{U}_{d_1 - m}$ gemein haben können.

Aufgabe 67. Welche Grade von Orthogonalität können die in einem R_8 liegenden Räume R_5 und R_6 zu einander haben?

37. **Orthogonalität kontra Parallelismus.** Wir haben gefunden, dafs zwei Räume, die einem dritten Raume parallel sind, dann (19₈) und auch nur dann (24₈) zu einander parallel sind, wenn die drei Räume die gleiche Dimensionenzahl haben und es sich um vollständigen Parallelismus handelt (25₈). Wir möchten nun untersuchen, welche Schlüsse gezogen werden können in Bezug auf zwei Räume, welche zu einem dritten Raume senkrecht sind.

In der Stereometrie sind zwei Normalen einer Ebene, sowie zwei Normalebenen einer Gerade immer einander parallel; jedoch kann das nämliche nicht behauptet werden von irgend zwei eine gegebene Gerade senkrecht kreuzenden Geraden. Natürlich hängt dieser Unterschied wieder hiermit zusammen, dafs die uneigentlichen Elemente $\overline{U}_1$ und $\overline{U}_2$ einer Gerade und einer Ebene, in senkrechter Stellung zu einander, sich gegenseitig eindeutig bestimmen, während dies mit den uneigentlichen Punkten zweier zu einander senkrechter Geraden nicht der Fall ist. Diese Bemerkungen führen unmittelbar zum allgemeinen Satze:

Zwei Räume R_{d-d_1}, welche zu einem nämlichen Raume R_{d_1} senkrecht sind und mit ihm im nämlichen Raume R_d liegen, sind einander parallel.

Aufgabe 68. In welchem Sinne kann man im R_n das Ersetzen eines Raumes R_d durch einen zu ihm senkrechten Raum R_{n-d} eine negative, das Ersetzen von R_d durch einen parallelen Raum R'_d eine positive Operation nennen?

Aufgabe 69. Beweise, dafs für zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2}, welche innerhalb des durch sie bestimmten Raumes in Bezug auf einander den höchst möglichen Orthogonalitätsgrad aufweisen, die Summe der Grade von Parallelismus

Digitized by Google

und Orthogonalität die Einheit ist und diese Summe also die Einheit nicht übersteigen kann.

[Haben die uneigentlichen Räume $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ der gegebenen Räume R_{d_1} und R_{d_2} ($d_1 \gtreqless d_2$ d)en Raum $\overline{U}_{d_{1,2}}$ gemein, so bestimmen sie einen Raum $\overline{U}_{d_1+d_2-d_{1,2}}$ und sind ihnen in diesem $\overline{U}_{d_1+d_2-d_{1,2}}$ respektive zwei Räume $\overline{U}_{d_2-d_{1,2}}$ und $\overline{U}_{d_1-d_{1,2}}$ senkrecht zugeordnet. Nun haben die R_{d_1} und R_{d_2} in ihrem Raume in Bezug auf einander den höchst möglichen Orthogonalitätsgrad, wenn $\overline{U}_{d_1-d_{1,2}}$ in $\overline{U}_{d_1}$ und also (34a) auch $\overline{U}_{d_2-d_{1,2}}$ in $\overline{U}_{d_2}$ liegt. Es sind dann die Grade von Parallelismus und Orthogonalität $\frac{d_{1,2}}{d_1}$ und $\frac{d_1-d_{1,2}}{d_1}$, weil $d_1 \gtreqless d_2$ angenommen ist, u. s. w.]

Aufgabe 70. Von zwei gegebenen Räumen R_{d_1} und R_{d_2} weifs man, dafs jeder von ihnen irgend einem Koordinatenraume der nämlichen Dimensionenzahl eines gegebenen rechtwinkligen Systemes parallel ist. Beweise, dafs für diese Räume R_{d_1} und R_{d_2} die Summe der Grade von Parallelismus und Orthogonalität die Einheit ist.

38. **Lageverhältnisse der Gebilde in den verschiedenen Räumen.** Kommt beim Urteil über das Lageverhältnis zweier Räume neben dem Grade von Parallelismus auch der Grad von Orthogonalität in Betracht, so ändern sich die Indices $2k$ und $2(k-i)+1$ der Symbole $(0, k)$ und (i, k) von Nr. 28. Dabei stellt sich leicht heraus, dafs die durch diese Symbole angegebenen Reihenfolgen

$$(\overline{R}_0, \overline{R}_1, \overline{U}_1, \overline{R}_2, \overline{U}_2, \ldots \overline{R}_{k-1}, \overline{U}_{k-1}, \overline{R}_k),$$
$$(\overline{R}_i, \overline{U}_i, \overline{R}_{i+1}, \overline{U}_{i+1}, \ldots \overline{R}_{k-1}, \overline{U}_{k-1}, \overline{R}_k)$$

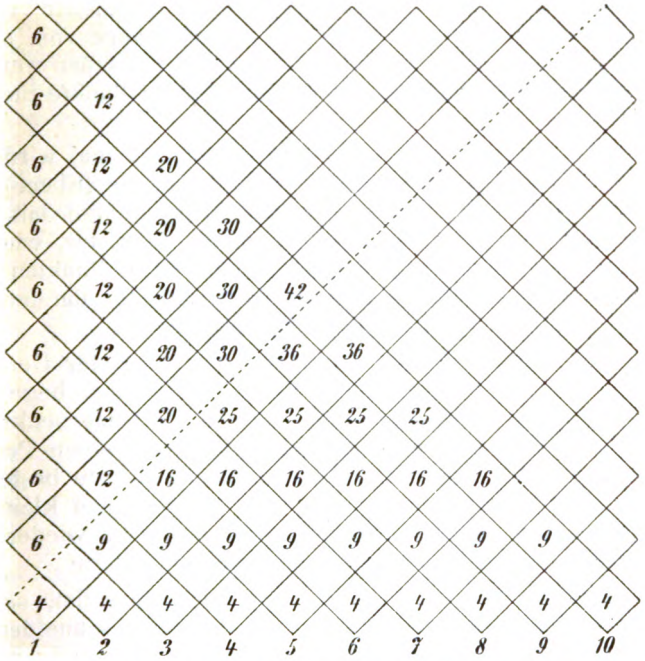
von gemeinschaftlichen Räumen rücksichtlich des Orthogonalitätsgrades die Reihen

$$(k, k, k-1, k-1, k-2, \ldots 2, 1, 1)$$
$$(k-i+1, k-i, k-i, k-i-1, \ldots 2, 1, 1)$$

von verschiedenen Fällen liefern. Hieraus geht allgemein hervor, dafs die Indices $2k$ und $2(k-i)+1$ von Nr. 28 durch $k(k+1)$ und $(k-i+1)^2$ zu ersetzen sind. Also ist die Tabelle der Anzahlen von Nr. 28 durch folgende Tabelle

Digitized by Google

zu ersetzen, rücksichtlich deren punktierte Gerade man Aufgabe 53 vergleichen kann.



Aufgabe 71. Es sind jetzt die Zahlen der im R_3, R_4, R_5, R_6, ... überhaupt möglichen Fälle nach einander 14, 33, 64, 111, ... Beweise, dafs es im R_n im allgemeinen $\frac{1}{3}(2n^3 - 6n^2 + 25n - 33)$ mögliche Fälle giebt.

[Der Fall $n = 2$ wird nicht von der allgemeinen Formel beherrscht.]

---

§ 4. Abstand, Projektion und Winkel.

39. **Stereometrischer Rückblick.** Drei Elemente, wie Punkt, Gerade und Ebene, lassen zu je zweien sechs verschiedene Wiederholungskombinationen zu. Wir betrachten diese, in Bezug auf die Frage der Abstandsbestimmung, nach einander.

Digitized by Google

Der Definition gemäfs ist der Abstand zweier Punkte der von diesen Punkten begrenzte Teil der durch sie bestimmten Gerade. In der Euclidischen Geometrie bildet diese Strecke zugleich den Weg kleinster Länge vom einen Punkte zum andern. Schliefslich wird, wie wir sehen werden, jeder Abstandsbegriff auf den Abstand zweier Punkte zurückgeführt.

Der Abstand von Punkt und Gerade (Ebene) wird gemessen auf dem vom Punkte auf die Gerade (Ebene) gefällten Lote, vom Punkte bis zum Schnittpunkte mit der Gerade (Ebene). Es ist dieser Fufspunkt des Lotes, wie die Planimetrie (Stereometrie) lehrt, unter allen Punkten der Gerade (Ebene) dadurch ausgezeichnet, dafs für ihn der Abstand zum gegebenen Punkte ein Minimum ist.

Der Abstand zweier zu einander windschiefer Geraden ist die von den Schnittpunkten mit diesen Geraden begrenzte Strecke jener einzigen Gerade, welche sie beide senkrecht schneidet. Von allen Punktepaaren, welche aus einem Punkte der einen und einem Punkte der andern Gerade bestehen, hat das Paar der Schnittpunkte von einander den kleinsten Abstand, d. h. es bildet die angegebene Strecke wieder den kürzesten Weg von der einen Gerade zur andern.

Sind die gegebenen Geraden einander parallel, so bestimmen sie einen Büschel von sie senkrecht schneidenden einander parallelen Geraden, und auf jeder Gerade dieses Parallelenbüschels eine Strecke von der nämlichen Länge, welche als der Abstand der gegebenen Geraden gedeutet wird. Und obgleich der Minimumweg von der einen Gerade zur andern offenbar Null ist, wenn die Geraden einen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben, so sagt man gewöhnlich, dafs bei einander schneidenden Geraden von Abstand nicht die Rede sein kann, indem man den Begriff des verschwundenen Abstandes bei Geraden ausschliefslich anwendet auf einander parallele Geraden, und zusammenfallende Geraden betrachtet als parallele Geraden mit einem Abstande Null.

Nach dieser Auffassung, an die wir uns hier anschliefsen wollen, kann bei Gerade und Ebene oder bei zwei Ebenen natürlich auch nur dann von Abstand die Rede sein, wenn die gegebenen Gebilde einander parallel sind. Es bestimmen

Digitized by Google

dann diese Gebilde im ersten Falle einen Büschel, im zweiten Falle einen Bündel oder ein Netz von sie senkrecht schneidenden einander parallelen Geraden, und auf irgend einer dieser Geraden eine Strecke, welche wieder den Abstand dieser Gebilde kennzeichnet.

Fassen wir alles zusammen, so ergeben sich die folgenden Schlüsse:

a) Nur bei linearen Räumen, welche keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben, wird von Abstand gesprochen.

b) Der Abstand steht auf den beiden gegebenen Gebilden senkrecht und ist also Minimumweg vom einen zum andern.

c) Der Abstand bleibt immer der Länge und der Richtung nach bestimmt, auch wenn es anstatt einer einzigen Gerade, auf welcher man ihn mifst, eine einfache oder sogar mehrfache Unendlichkeit solcher Geraden giebt.

d) Das Endergebnis bleibt ungeändert, gleichgültig ob man die gegebenen Gebilde in dem durch sie bestimmten Raume oder in einem Raume höherer Dimensionenzahl liegend denkt.

e) Wenn es sich nur um die Gröfse des Abstandes handelt, so kann das Problem immer zurückgeführt werden auf die Bestimmung des Abstandes der zwei einander parallelen Gebilde, welche erhalten werden, wenn man durch jedes der zwei gegebenen Gebilde und den uneigentlichen Raum des andern den durch diese Räume bestimmten linearen Raum hindurchlegt.

Wie wir sehen werden, lassen sich diese Schlüsse unmittelbar auf lineare Gebilde von beliebiger Dimensionenzahl übertragen.

40. **Der Abstand zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2} ohne gemeinschaftliche eigentliche Punkte.** Wir setzen voraus, dafs die gegebenen Räume den uneigentlichen Raum $\overline{U}_w$ gemein haben, und suchen nun sofort den Ort der zu gleicher Zeit auf beiden Räumen senkrecht stehenden Geraden.

Jede Gerade a, welche die gegebenen Räume senkrecht schneidet, hat mit diesen Räumen offenbar zwei verschiedene Punkte gemein und gehört also dem durch diese Räume bestimmten Raume an; also können wir letzteren Raum bei

Digitized by Google

der Untersuchung des Ortes dieser Gerade a als Operationsraum betrachten. Nach Formel 6) kommt diesem Operationsraume das Symbol $R_{d_1+d_2-w+1}$ zu.

Die uneigentlichen Räume $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ von R_{d_1} und R_{d_2} bestimmen nach der analogen Formel 5), weil ihnen $\overline{U}_w$ gemeinsam ist, einen Raum $\overline{U}_{d_1+d_2-w}$. Diesem Raume ist im uneigentlichen Raume $\overline{U}_{d_1+d_2-w+1}$ des Operationsraumes $R_{d_1+d_2-w+1}$ ein einziger Punkt $\overline{U}_1$ senkrecht zugeordnet, d. h. alle Geraden a, welche die gegebenen Räume senkrecht schneiden, sind einander parallel.

Wir erhalten nun den gesuchten Ort der Geraden a als Schnittraum der beiden durch den Punkt $\overline{U}_1$ und je einen der gegebenen Räume bestimmten Räume. Dieser Ort ist also wieder nach Formel 6), als Durchschnitt zweier einen Raum $R_{d_1+d_2-w+1}$ bestimmenden Räume R_{d_1+1} und R_{d_2+1}, ein Raum von $w+1$ Dimensionen, welchen wir als $\overline{R}_{w+2}$ bezeichnen. Es giebt die nachstehende Tabelle an, wie die bekannten Ergebnisse von Nr. 39 sich diesem allgemeinen Resultate unterordnen.

	d_1	d_2	w	$w+2$
Zwei Punkte	0	0	0	2
Punkt und Gerade . . .	0	1	0	2
Punkt und Ebene . . .	0	2	0	2
Zwei windschiefe Geraden	1	1	0	2
Zwei parallele Geraden .	1	1	1	3
Gerade und Ebene . . .	1	2	1	3
Zwei Ebenen	2	2	2	4

Man beweist nun leicht, dafs die gegebenen Räume R_{d_1} und R_{d_2} auf allen Geraden a des gefundenen Ortes Strecken gleicher Länge bestimmen. Sind nämlich a, a' irgend zwei dieser Geraden, so schneidet die diese Geraden enthaltende Ebene die Räume R_{d_1} und R_{d_2} in zwei auf a und a' senk-

Digitized by Google

recht stehenden Geraden, welche mit diesen also ein Rechteck einschliefsen, u. s. w.

Die in alle Geraden a eingeschnittene Strecke heifst nun der *Abstand* der gegebenen Räume.

41. **Die überhaupt möglichen Fälle von Abstandsbestimmung.** Es enthält die vorhergehende Tabelle alle Abstandsbestimmungen, welche im Raume mit dem Punktwerte vier möglich sind. Kennzeichnen wir diese Fälle abkürzend mittels Zusammenfügung der Werte von d_1, d_2, w, so ist 000 die einzige Abstandsbestimmung auf der Gerade und gehören in dieser Hinsicht 010, 111 der Ebene und 020, 110, 121, 222 dem Raume an. So fortfahrend, findet man bis zum Raume von acht Dimensionen inklusive im ganzen die durch die nachstehende Tabelle angegebenen Fälle.

000	221	343	353	341	070	452
010	232	444	443	262	160	373
111	333	050	454	352	250	463
020	040	140	555	442	340	553
110	130	230	060	363	171	474
121	220	151	150	453	261	564
222	141	241	240	464	351	575
030	231	331	330	554	441	665
120	242	252	161	565	272	676
131	332	342	251	666	362	777

Aufgabe 72. Es sind die Zahlen der im R_1, R_2, ... R_8 möglichen Fälle nach einander 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20. Beweise, dafs es im R_n im allgemeinen $\frac{1}{4}n(n+2)$ oder $\frac{1}{4}(n+1)^2$ mögliche Fälle giebt, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

[Die Zahl der im R_n möglichen Fälle ist

für n gerade ... $2\left\{\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-2\right)+\ldots+1\right\}$,

für n ungerade ... $\frac{n+1}{2}+2\left\{\frac{n-1}{2}+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)+\ldots+1\right\}$.]

Digitized by Google

42. **Die Projektion einer Gerade auf einen Raum R_d.** Man projiziert einen gegebenen Punkt P auf einen gegebenen Raum R_d, indem man P verbindet mit dem uneigentlichen Punkt $\overline{U}_1$, welcher im durch R_d und P bestimmten Raume R_{d+1} dem uneigentlichen Raume $\overline{U}_d$ von R_d senkrecht zugeordnet ist, und dann den Schnittpunkt P' dieses aus P auf R_d gefällten Lotes $P\overline{U}_1$ mit R_d bestimmt. Und verbindet man P und seine Projektion P' mit irgend einem Punkte O von R_d durch eine Ebene α, so ist diese Ebene der Ort der aus den Punkten der R_d schneidenden Gerade OP auf R_d gefällten Lote und also OP' als Ort der Fufspunkte dieser zu einander parallelen Lote die Projektion von OP auf R_d. Allein, wenn O mit P' zusammenfällt, OP also in O senkrecht auf R_d steht, so fallen die aus den Punkten von OP auf R_d gefällten Lote sämtlich mit OP zusammen und ist die Projektion von OP ein Punkt, der Punkt O.

Ist weiter im Operationsraume R_n eine zu R_d windschiefe Gerade g beliebig gegeben und fällt man aus jedem Punkte P von g das Lot $P\overline{U}_1$ auf R_d, so liegen diese Lote sämtlich im durch R_d und g bestimmten Raume R_{d+2} und ist also der Ort der uneigentlichen Punkte $\overline{U}_1$ die in diesem R_{d+2} dem $\overline{U}_d$ von R_d senkrecht zugeordnete Gerade $\overline{U}_2$. Ist diese Gerade $\overline{U}_2$ zu g windschief — und dies ist der allgemeine Fall —, so bestimmen $\overline{U}_2$ und g einen Raum R_3, welcher mit jedem der gefällten Lote zwei Punkte gemein hat und diese also enthält. Und dann ist der Ort der Projektionen P' als Durchschnitt der im R_{d+2} enthaltenen Räume R_d und R_3 nach Formel 6) eine Gerade g'. Ist dagegen der uneigentliche Punkt von g in $\overline{U}_2$ enthalten, so bestimmen $\overline{U}_2$ und g eine Ebene, welche alle Lote aufnimmt und ist der Ort der Projektionen P' der Schnittpunkt dieser Ebene mit R_d. Man findet also, dafs die Projektion einer R_d senkrecht kreuzenden[31a] Gerade ein Punkt ist. Oder:

Die Projektion einer Gerade auf einen Raum R_d ist im allgemeinen Falle wieder eine Gerade und nur, wenn die gegebene Gerade den Raum R_d entweder senkrecht schneidet oder senkrecht kreuzt, ein Punkt.

Aufgabe 73. Zu beweisen, dafs der Ort der Lote im allgemeinen Falle ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Digitized by Google

[Die Lote schneiden drei in einem R_3 liegende Geraden g, g', $\bar{U}_2$, von denen die letzte im Unendlichen liegt.]

Aufgabe 74. Wo liegen die drei Leitlinien dieser Fläche, wenn zwei zu einander windschiefe Geraden gegeben sind und man eine dieser Geraden auf die andere projiziert?

Sind im Operationsraume R_n ein Punkt P und ein Raum R_d gegeben, so wird die Projektion von P auf R_d auch gefunden, indem man P durch einen Raum R_{n-d} verbindet mit dem uneigentlichen Raume $\bar{U}_{n-d}$, welcher im R_n dem uneigentlichen Raume $\bar{U}_d$ von R_d senkrecht zugeordnet ist, und dann den Schnittpunkt P' dieses Raumes R_{n-d} mit R_d bestimmt. Ist der gegebene Punkt insbesondere ein uneigentlicher Punkt, so ist der projizierende Raum von $n-d$ Dimensionen ein uneigentlicher Raum U_{n-d} und die Projektion also ein ganz bestimmter ebenfalls uneigentlicher Punkt von R_d. In Verbindung mit dem letzten Satze geht hieraus der neue Satz hervor:

Die Projektionen zweier zu einander paralleler Geraden auf einen Raum R_d sind zu einander parallel. Und wenn die eine Projektion ein Punkt ist, so ist die andere es auch.

Wir geben einen zweiten von der Betrachtung von uneigentlichen Elementen freien Beweis dieses Satzes.

Ist g' (Fig. 8) die Projektion von g auf R_d und sind die Punkte A', B', C', ... von g' die Projektionen der Punkte A, B, C, ... von g auf R_d, so liegen die projizierenden Geraden AA', BB', CC', ... im durch g und g' bestimmten Raume in Ebenen α, β, γ, ... senkrecht zu g'. Weil nach einem bekannten stereometrischen Satze die von drei parallelen Ebenen α, β, γ in zwei Geraden g, g' eingeschnittenen Segmente eine geometrische Proportion bilden, so wird B' der Mittelpunkt des Segments $A'C'$ sein, wenn B der Mittelpunkt von AC ist. Es werden also zwei Strecken AC und BD (Fig. 9) mit gemeinschaftlicher Mitte O

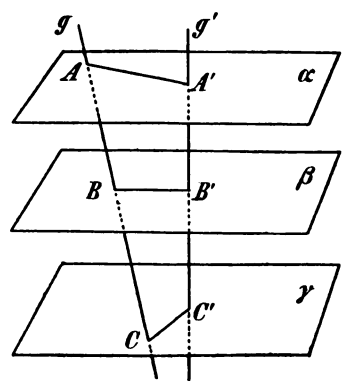


Fig. 8.

Digitized by Google

sich projizieren als zwei Strecken $A'C'$ und $B'D'$ mit gemeinschaftlicher Mitte O'. Und diese Projektionen $A'C'$ und $B'D'$ fallen im allgemeinen nicht auf eine nämliche Gerade; denn wäre dies immer der Fall, so würde der ganze Raum R_n, also auch R_d selbst, sich auf R_d als eine Gerade projizieren, was widersinnig ist; denn jeder Punkt von R_d fällt natürlich mit seiner Projektion auf R_d zusammen. Allein, wenn die Strecken AC und BD mit gemeinschaftlicher Mitte O sich als zwei auf verschiedenen Geraden liegende Strecken $A'C'$ und $B'D'$ mit gemeinschaftlicher Mitte O' projizieren, so ist die Projektion des Parallelogrammes $ABCD$ wieder ein Parallelogramm, d. h. die Projektionen von zwei parallelen Strecken gleicher Länge AB und DC sind wieder parallele Strecken gleicher Länge $A'B'$ und $D'C'$. Und da dies auch der Fall bleibt, wenn zufälligerweise $A'B'$ und $D'C'$ der nämlichen Gerade angehören, [denn in diesem Falle folgt aus $A'O' = O'C'$ und $B'O' = O'D'$ mittels Subtraktion unmittelbar $A'B' = D'C'$], so gilt also, wenn man mit Bellavitis unter „equipollente Strecken" gleichgerichtete Teile gleicher Länge zweier zu einander paralleler Geraden versteht, allgemein der Satz:

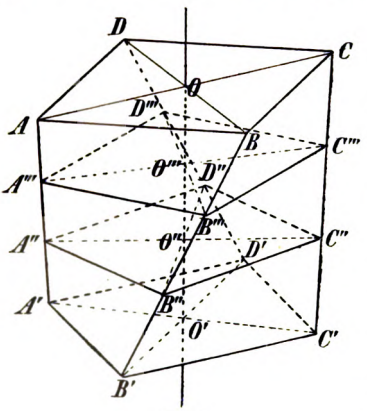


Fig. 9.

Equipollente Strecken projizieren sich als equipollente Strecken.

Aufgabe 75. Beweise, dafs dieser Satz nicht umkehrbar ist, d. h. dafs zwei Strecken AB, DC mit equipollenten Projektionen deshalb selbst noch nicht equipollent zu sein brauchen.

Man sagt in der Geometrie der Lage, dafs die Punktreihe g' der Projektionen P' der Punkte P einer Gerade g mit der Reihe der Punkte P von g projektiv verwandt ist, und nennt diese Punktreihen insbesondere ähnlich, weil irgend zwei Paare einander entsprechender Strecken eine geometrische Proportion bilden(42$_{10}$). Bekanntlich trifft dies

Digitized by Google

allemal zu, sobald die uneigentlichen Punkte beider Reihen sich entsprechen.

43. **Die Projektion einer Ebene auf einen Raum R_d.** Sind im R_n eine Ebene ε und ein Raum R_d gegeben, so ist die uneigentliche Gerade $\overline{U}_2$ von ε entweder zum uneigentlichen Raume $\overline{U}_{n-d}$, welcher dem $\overline{U}_d$ von R_d senkrecht zugeordnet ist, windschief, oder sie hat mit $\overline{U}_{n-d}$ einen Punkt gemein, oder sie ist in $\overline{U}_{n-d}$ enthalten. Wir betrachten diese drei Fälle nach einander.

Im allgemeinen Falle, wo $\overline{U}_2$ zu $\overline{U}_{n-d}$ windschief ist, enthält ε keine zu R_d senkrechte Gerade und also auch kein einziges Punktepaar P_1, P_2 mit zusammenfallender Projektion P'; denn, wenn P_1 und P_2 sich in P' projizieren, so steht die Ebene $P_1 P_2 P'$ in P' auf R_d senkrecht und liegt der in ε enthaltene uneigentliche Punkt von $P_1 P_2$ in $\overline{U}_{n-d}$. Es ist also — denn es hat auch niemals ein Punkt zwei Projektionen — die Zahl der Projektionen P' der Zahl der Punkte P gleich, d. h. die Projektion von ε ist ebenso wie ε zweidimensional. Und dieses zweidimensionale Gebilde mufs linear sein, da es die Eigenschaft besitzt, die durch je zwei seiner Punkte bestimmte Gerade zu enthalten. Sind nämlich P' und Q' irgend zwei Punkte der Projektion und P und Q die entsprechenden Punkte von ε, so ist die Gerade PQ in ε enthalten und diese Gerade hat[42a] die Gerade $P'Q'$ zur Projektion. Es ist also die Projektion von ε auf R_d eine Ebene ε'.

Aufgabe 76. Beweise diesen Satz mit Hilfe der Thatsache (Fig. 9), dafs die Projektion eines Parallelogrammes wieder ein Parallelogramm ist.

[Man betrachte zunächst eine Gerade EF, welche AC und BD in verschiedenen Punkten schneidet, und nachher eine in $\varepsilon = (AC, BD)$ um O sich drehende Gerade.]

Aufgabe 77. Zeige, dafs die Geradensegmente, welche die innerhalb des Parallelogrammes $ABCD$ liegenden Punkte mit ihren innerhalb des Parallelogrammes $A'B'C'D'$ liegenden Projektionen verbinden, einen nicht mehr linearen dreidimensionalen Körper ausfüllen, und dieser Körper von sechs Flächen, d. h. von zwei Ebenen und vier mit Teilen von

Digitized by Google

hyperbolischen Paraboloiden ausgefüllten windschiefen Vierseiten begrenzt wird.

[Es sind die Räume zweier einander gegenüberliegender windschiefer Vierseite einander parallel; weshalb?]

Aufgabe 78. Beweise, dafs der Körper der vorhergehenden Aufgabe sich nur in Räumen von mehr als vier Dimensionen ausbilden kann.

[Im R_4 würden die Ebenen der Parallelogramme wenigstens einen Punkt gemein haben, was hier nicht vorausgesetzt worden ist.]

Aufgabe 79. Zeige, dafs die Punkte A'', B'', C'', D'' (Fig. 9), welche die Strecken AA', BB', CC', DD' im nämlichen Verhältnis λ teilen, wieder die Eckpunkte eines Parallelogrammes sind.

[Es ist $A''C''$ ein Leitstrahl der von den aus den Punkten von AC auf $A'C'$ gefällten Loten gebildeten Regelschar, welche OO' im Punkte O'' im Verhältnis λ teilt und von OO' in O'' halbiert wird. Also halbieren auch $A''C''$ und $B''D''$ einander auf OO'.

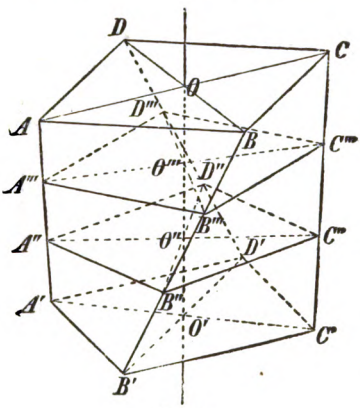


Fig. 9.

Aus diesem Ergebnisse folgt, dafs der Ort der Punkte A'', welche die Strecken AA' der projizierenden Geraden im Verhältnis λ teilen, eine Ebene ist. Deshalb ist der Ort der zweifach unendlichen Anzahl von Geraden AA' ebenfalls als Ort einer einfach unendlichen Anzahl von Ebenen zu deuten. Wir werden später Gelegenheit haben, diesen auf eine bekannte mehrdimensionale Verallgemeinerung der doppelten Erzeugung des hyperbolischen Paraboloids hinzielenden Gedanken zu entwickeln.]

Aufgabe 80. Die über die windschiefen Vierseite $ACC'A'$ und $BDD'B'$ gespannten hyperbolischen Paraboloide teilen alle bei Änderung von λ entstehenden Parallelogramme

Digitized by Google

$A''B''C''D''$ in vier gleiche Dreiecke. Jedoch ist es nicht erlaubt, hieraus zu schliefsen, dafs sie es auch den sechsflächigen dreidimensionalen Körper thun. Weshalb nicht?

[Dieser Schlufs ist sogar nicht einmal erlaubt im viel einfacheren Falle, wenn die Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in einem Raume liegen und man es mit einem Prismenstumpfe, dessen Basis ein Parallelogramm ist, zu thun hat.]

Hat zweitens die Gerade $\overline{U}_2$ von ε mit dem zum $\overline{U}_d$ von R_d senkrecht zugeordneten Raume $\overline{U}_{n-d}$ den Punkt $\overline{U}_1$ gemein, d. h. ist ε halb senkrecht zu R_d, so ist jede durch $\overline{U}_1$ gehende Gerade von ε senkrecht zu R_d und die Projektion dieser Gerade auf R_d also ein Punkt. Betrachtet man nun in ε den Büschel von parallelen Strahlen mit $\overline{U}_1$ als Scheitel und irgend eine andere Gerade g, so ist die Projektion irgend eines Strahles dieses Büschels mit der Projektion des Schnittpunktes dieses Strahles mit g, also die Projektion von ε mit der Projektion von g identisch; d. h. die Projektion von ε ist eine Gerade.

Fällt drittens die Gerade $\overline{U}_2$ ganz in den zu $\overline{U}_d$ zugeordneten Raum $\overline{U}_{n-d}$ hinein, d. h. ist ε zu R_d senkrecht, so ist die Projektion irgend einer Gerade von ε identisch mit der Projektion irgend eines Punktes dieser Gerade. Also lehrt die Betrachtung eines in ε liegenden Strahlenbüschels mit einem eigentlichen Scheitel, dafs die Projektion von ε ein Punkt ist.

Aus der Bemerkung, dafs parallele Geraden parallele Projektionen haben, folgt, dafs dies auch mit parallelen Ebenen der Fall ist. Wir finden also:

Die Projektionen zweier paralleler Ebenen ε_1, ε_2 auf einen Raum R_d sind im allgemeinen Falle parallele Ebenen ε'_1, ε'_2. Sind ε_1, ε_2 halb senkrecht zu R_d, so sind die Projektionen dieser parallelen Ebenen parallele Geraden. Und die Projektionen sind Punkte, wenn ε_1, ε_2 zu R_d senkrecht sind.

Insbesondere geht hieraus hervor, dafs eine parallele Verschiebung der Ebene ε, durch welche irgend ein Punkt von ε mit einem beliebig gewählten Punkte O von R_d zur Deckung gebracht wird, die Art der Projektion nicht ändern kann. Es ist also in Bezug auf die Art der Projektion ganz

Digitized by Google

gleichgültig, ob diese Verschiebung zur Folge hat, daſs die verschobene Ebene entweder nur einen Punkt, oder eine Gerade mit R_d gemein hat, oder ganz in R_d liegt; d. h. die Art der Projektion hängt nur zusammen mit Verhältnissen von Orthogonalität und ganz und gar nicht mit Verhältnissen von Parallelismus.

Zwischen dem Punktfelde ε und seiner Projektion ε' besteht eine „kollineare“ Verwandtschaft; denn es entspricht jedem Punkte P von ε ein bestimmter Punkt P' von ε' derart, daſs P' eine Gerade durchläuft, wenn P eine Gerade beschreibt. Diese kollineare Verwandtschaft nennt man insbesondere eine „affine“, weil die uneigentlichen Geraden von ε und ε' sich entsprechen. Hieraus folgt, daſs zwischen irgend einer Figur in ε und ihrer Projektion in ε' alle Maſsverhältnisse bestehen, welche bei affinen ebenen Figuren obwalten. So ist die Projektion eines Kegelschnittes in ε ein Kegelschnitt von der nämlichen Art in ε'; so projizieren sich die Kreise von ε als ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen von ε', u. s. w. Anstatt hier tiefer einzugehen auf diese Betrachtungen der Geometrie der Lage, welche wir bei künftigen Beweisführungen doch nicht benutzen wollen, entwickeln wir nur noch einen allgemeinen Satz, welcher diese Maſsverhältnisse alle umfaſst.

Projiziert man zwei in parallelen Ebenen ε_1, ε_2 liegende Vielecke $A_1 B_1 C_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$, deren gleichnamige Seiten equipollente Strecken sind, auf R_d, so erhält man in den Ebenen ε'_1, ε'_2 zwei Vielecke $A'_1 B'_1 C'_1 \ldots$ und $A'_2 B'_2 C'_2 \ldots$, welche nach dem letzten Satze der vorhergehenden Nummer die nämliche Eigenschaft besitzen; d. h. kurz gefaſst: equipollente ebene Vielecke projizieren sich als equipollente ebene Vielecke. Durch Vermehrung der Seitenzahl der Vielecke findet man allgemein:

Equipollente ebene Figuren projizieren sich im allgemeinen als equipollente ebene Figuren, können sich aber in besonderen Fällen als equipollente Strecken, oder als Punkte projizieren.

Aufgabe 81. Beweise, daſs ein Parallelepiped sich im allgemeinen als ein Parallelepiped projiziert, mittels der Bemerkung, daſs equipollente Parallelogramme sich im allgemeinen als equipollente Parallelogramme projizieren.

Digitized by Google

44. **Die Projektion eines Raumes R_{d_1} auf einen Raum R_{d_2}.** Es liegt die Vermutung nahe, dafs die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} im allgemeinen Falle wieder ein R_{d_1} sein wird. Allein dies ist offenbar nicht möglich, wenn $d_1 > d_2$ ist, wie wir bald näher erklären werden.

Sind $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ die uneigentlichen Räume von R_{d_1} und R_{d_2}, und ist $\overline{U}_{n-d_2}$ im uneigentlichen Raume $\overline{U}_n$ von R_n dem Raume $\overline{U}_{d_2}$ senkrecht zugeordnet, so möge zuerst vorausgesetzt werden, $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$ seien von einander unabhängig. Dann enthält R_{d_1} keine zu R_{d_2} normale Gerade und deshalb[43a] auch keine zwei Punkte mit zusammenfallenden Projektionen. Hieraus folgt wieder, dafs die Projektion von R_{d_1} dann ebenfalls d_1 Dimensionen hat. Und diese Projektion ist linear, da sie offenbar die durch je zwei ihrer Punkte bestimmte Gerade enthält; d. h. die Projektion von R_{d_1} ist ein Raum R'_{d_1}.

In der Voraussetzung, dafs $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$, anstatt zu einander windschief zu sein, einen Raum $\overline{U}_{d_3}$ gemein haben, findet man für die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} einen Raum $R'_{d_1-d_3}$. Ist nämlich $\overline{U}_{d_1-d_3}$ so in $\overline{U}_{d_1}$ angenommen worden, dafs $\overline{U}_{d_3}$ und $\overline{U}_{d_1-d_3}$ zusammen $\overline{U}_{d_1}$ bestimmen — wozu nach Formel 5) nur nötig ist, dafs $\overline{U}_{d_3}$ und $\overline{U}_{d_1-d_3}$ keinen Punkt gemein haben —, und ist O irgend ein fester eigentlicher Punkt von R_{d_1}, so kann R_{d_1} gedeutet werden als der Ort der Räume R_{d_3} durch $\overline{U}_{d_3}$ und einen veränderlichen Punkt P des festen Raumes $R_{d_1-d_3}$, welcher durch O und $\overline{U}_{d_1-d_3}$ bestimmt wird. Allein, dann ist die Projektion jedes dieser zu R_{d_2} senkrechten Räume R_{d_3} mit der Projektion P' des entsprechenden Punktes P von $R_{d_1-d_3}$ identisch, und also die Projektion des ganzen Ortes R_{d_1} nicht von jener dieses Raumes $R_{d_1-d_3}$ verschieden. Weil der Raum $\overline{U}_{d_1-d_3}$ unabhängig ist von $\overline{U}_{n-d_2}$, so ist die Projektion von $R_{d_1-d_3}$ — und also auch diejenige von R_{d_1} — ein Raum $R'_{d_1-d_3}$.

Wir beweisen nun folgenden allgemeinen Satz:

Sind im R_n die Räume R_{d_1}, R_{d_2} $(d_1 < d_2 + 1)$ gegeben und hat der Raum $\overline{U}_{d_1}$ von R_{d_1} mit dem zu dem Raume $\overline{U}_{d_2}$

Digitized by Google

von R_{d_2} senkrecht zugeordneten Raume $\overline{U}_{n-d_2}$ den Raum $\overline{U}_{d_3}$ gemein, so ist sowohl die Projektion von R_{d_2} auf R_{d_1} wie die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} ein Raum $R_{d_1-d_3}$.

Oben ist schon bewiesen worden, dafs die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} unter den gegebenen Verhältnissen ein $R_{d_1-d_3}$ ist. Wir haben uns also nur noch mit der Projektion von R_{d_2} auf R_{d_1} zu beschäftigen. Dazu betrachten wir die Räume $\overline{U}_{n-d_1}$, $\overline{U}_{d_2}$ und $\overline{U}_{n-d_3}$, welche den oben hervorgetretenen Räumen $\overline{U}_{d_1}$, $\overline{U}_{n-d_2}$ und $\overline{U}_{d_3}$ im $\overline{U}_n$ senkrecht zugeordnet sind. Aus dem Umstande, dafs $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$ den Raum $\overline{U}_{d_3}$ gemein haben und weiter nichts, folgt dann nach dem ersten allgemeinen Satze von Nr. 34, dafs $\overline{U}_{n-d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ im Raume $\overline{U}_{n-d_3}$ und in keinem Raume von niedrigerem Punktwerte liegen; denn weil $\overline{U}_{d_3}$ in $\overline{U}_{d_1}$ und $\overline{U}_{n-d_2}$ liegt, so liegen umgekehrt $\overline{U}_{n-d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ in $\overline{U}_{n-d_3}$. Mit Hilfe der Formel 5) geht hieraus hervor, dafs $\overline{U}_{n-d_1}$ und $\overline{U}_{d_2}$ einen Raum $\overline{U}_{d_4}$ gemein haben, dessen Punktwert d_4 durch die Gleichung

$$(n - d_3) = (n - d_1) + d_2 - d_4$$

bestimmt wird. Nun geht aber das oben erhaltene Resultat bei Vertauschung von d_1 und d_2 und Ersetzung von d_3 durch d_4 dahin über, dass die Projektion von R_{d_2} auf R_{d_1} ein $R_{d_2-d_4}$ ist, wenn der Raum $\overline{U}_{d_2}$ mit dem Raume $\overline{U}_{n-d_1}$ einen Raum R_{d_4} gemein hat; weil die gefundene Gleichung auch in der Form

$$d_2 - d_4 = d_1 - d_3$$

geschrieben werden kann, so ist die Projektion von R_{d_2} auf R_{d_1} also wirklich ein $R_{d_1-d_3}$.

Obige Betrachtungen liefern nun auch eine nähere Erklärung der an sich evidenten Thatsache, dass die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} für $d_1 > d_2$ höchstens eine Dimensionenzahl d_2 haben kann, welcher Fall wirklich eintritt, wenn R_{d_1} und R_{d_2} im R_n beliebig gewählt werden. Jeder Punkt von R_{d_2} ist dann, wie durch Rechnung mit den uneigentlichen Elementen bestätigt wird, die Projektion eines in R_{d_1} liegenden Raumes $R_{d_1-d_2}$, welcher zu R_{d_2} normal ist. So ist — um

Digitized by Google

dieses Resultat durch ein einfaches Beispiel der Stereometrie zu erläutern — die Projektion der Ebene ε (Fig. 10) auf eine zu ihr geneigte Gerade g nur eine Gerade, indem ε der Ort ist, von zu g normalen Geraden $a, b, c, d, \ldots$, welche sich in den Punkten $A, B, C, D, \ldots$ von g projizieren. Und wird die Projektion von g auf ε ein Punkt, so ist dies auch umgekehrt mit der Projektion von ε auf g der Fall.

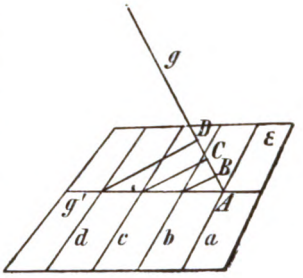


Fig. 10.

In Verbindung mit der Definition des Orthogonalitätsgrades kann man dem letzten allgemeinen Satze auch folgende Fassung geben:

Sind zwei Räume R_{d_1}, R_{d_2} $(d_1 < d_2 + 1)$ *mit dem Orthogonalitätsgrade* $\frac{d_3}{d_1}$ *gegeben, so ist die Projektion des einen dieser Räume auf den andern immer ein Raum* $R_{d_1 - d_3}$.

In dieser Form ist der Satz von der Zahl n der Dimensionen des Operationsraumes unabhängig, und ist also nur die Möglichkeitsbedingung $d_2 < n + 1$ zu beachten, so lange es gleichgültig bleibt ob und wie der eine Raum von seiner Projektion auf den andern Raum durchsetzt wird.

Aufgabe 82. Zu beweisen, dass R_{d_2} mit seiner Projektion auf R_{d_1} einen Raum R_{d_3} gemein hat, wenn dies mit R_{d_1} und seiner Projektion auf R_{d_2} der Fall ist.

Aufgabe 83. Können die Projektionen von R_{d_1} auf R_{d_2} und R_{d_2} auf R_{d_1} einen Punkt gemein haben, wenn R_{d_1} und R_{d_2} zu einander windschief sind?

Ist R'_{d_1} die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} und besteht also zwischen R_{d_1} und R_{d_2} keine Spur von Orthogonalität, so sind die Räume R_{d_1} und R'_{d_1} wieder so auf einander bezogen, dass irgend einem Punkte P von R_{d_1} ein bestimmter Punkt P' von R'_{d_1} und irgend einer Gerade g von Punkten P von R_{d_1} eine bestimmte Gerade g' von Punkten P' von R'_{d_1} entspricht. Und diese „kollinearen“ Räume

Digitized by Google

R_{d_1}, R'_{d_1} nennt man wieder „affin" verwandt, weil jedem uneigentlichen Punkte $\bar{U}_1$ von R_{d_1} ein uneigentlicher Punkt $\bar{U}'_1$ von R'_{d_1} entspricht. Aus der Thatsache, dass parallele Geraden von R_{d_1} sich als parallele Geraden von R_{d_2} projizieren, folgt dann wieder allgemein:

Equipollente Figuren von R_{d_1} projizieren sich als equipollente Figuren von R'_{d_1}.

Die *allgemeine* kollineare Verwandtschaft wird im siebenten Paragraphen besprochen werden.

45. **Definition des Winkelbegriffs.** Schon in Nr. 31 haben wir gesehen, wie auch in der mehrdimensionalen Geometrie der Winkel zweier zu einander windschiefer Geraden bestimmt wird. An diesen Gedanken anknüpfend bringen wir jetzt in Erinnerung, dafs der Winkel zweier linearer Gebilde in der Stereometrie allemal auf den Winkel zweier sich schneidender Geraden zurückgeführt wird. Bekanntlich wird der Winkel einer Gerade g mit einer Ebene ε von der Gerade g mit ihrer Projektion g' auf die Ebene gebildet; bekanntlich kann der Scheitel O (Fig. 11) des Winkels A_1OA_2 zweier Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ auf der Schnittlinie dieser Ebenen beliebig gewählt werden und bildet OA_2 die Projektion von OA_1 auf ε_2, OA_1 die Projektion von OA_2 auf ε_1. Auch zeigen diese Winkel Minimummerkmale. So ist der spitze Winkel einer Gerade und einer Ebene unter allen Winkeln, welche diese Gerade mit irgend einer Gerade der Ebene bildet, ein absolutes Minimum. Im Gegensatz hierzu ist der spitze Winkel A_1OA_2 zweier Ebenen nur ein relatives Minimum. Denn, obgleich dieser Winkel sich vergrössert, wenn man entweder OA_1 oder OA_2 in den sie enthaltenden Ebenen um O dreht, so wird er kleiner, wenn man OA_1 und OA_2 zu gleicher Zeit so um O dreht, dafs OA_2 die Projektion von OA_1 auf ε_2 bleibt.

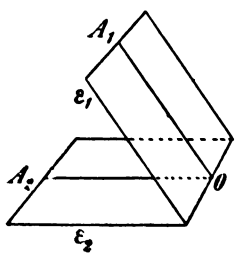


Fig. 11.

Liegen nun im R_n eine Gerade OA und ein durch O gehender Raum R_d gegeben vor, so leuchtet unmittelbar ein, was unter dem Winkel dieser beiden Gebilde zu verstehen sein wird. Ist nämlich AA' der Abstand von A zu R_d,

Digitized by Google

also A' die Projektion von A auf R_d und deshalb auch OA' die Projektion von OA auf R_d, so ist der spitze Winkel AOA' immer kleiner als der Winkel AOB, welcher von OA mit irgend einer andern durch O gehenden Gerade OB von R_d gebildet wird; denn der Schnitt mit dem durch OA, OA' und OB bestimmten Raume (Fig. 12) zeigt, dafs der oben erwähnte stereometrische Satz hier zur Anwendung kommen kann. Unter allen Winkeln AOB ist der Winkel AOA' also dadurch ausgezeichnet, dafs er von OA und ihrer Projektion auf R_d gebildet wird und zu gleicher Zeit ein absolutes Minimum ist. Es ist also ganz natürlich, dafs man unter dem Winkel von OA und dem Raume R_d den Winkel AOA' versteht.

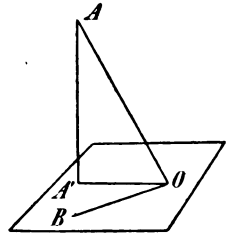


Fig. 12.

Sind die gegebenen Gebilde, Gerade und Raum R_d, zu einander windschief, so genügt es wieder durch irgend einen Punkt O von R_d eine parallele Gerade zu legen und den von dieser neuen Gerade mit R_d gebildeten Winkel zu bestimmen.

Wir schreiten nun zum Falle, dafs im R_n zwei Räume R_{d_1} und R_{d_2} mit gemeinsamem Punkte O gegeben sind, und untersuchen zuerst, unter welchen Umständen irgend eine Gerade OA_1 von R_{d_1} und irgend eine Gerade OA_2 von R_{d_2} mit einander einen Winkel A_1OA_2 bilden, welcher als Winkel der Räume R_{d_1} und R_{d_2} gedeutet werden kann.

Von den obigen Überlegungen geleitet, betrachten wir den Winkel A_1OA_2 als Winkel der Räume R_{d_1} und R_{d_2}, sobald der spitze Winkel A_1OA_2 wenigstens in dieser Hinsicht ein Minimum ist, dafs sowohl irgend eine Drehung von OA_1 in R_{d_1} wie irgend eine Drehung von OA_2 in R_{d_2} seinen Wert vergröfsert, wenn diese Drehungen jede für sich geschehen. Offenbar ist diese Bedingung damit identisch, dafs OA_2 die Projektion von OA_1 auf R_{d_2} und OA_1 die Projektion von OA_2 auf R_{d_1} sein mufs, d. h. dafs die Ebene des Winkels A_1OA_2 auf beiden Räumen R_{d_1} und R_{d_2} halb senkrecht stehen soll.

46. **Die Winkel zweier Ebenen im R_4.** Ist O der Schnittpunkt zweier im R_4 beliebig gewählter Ebenen ε_1, ε_2

Digitized by Google

und OA_1 irgend eine Gerade von ε_1, OA_2 irgend eine Gerade von ε_2, so hat der spitze Winkel A_1OA_2 offenbar ein absolutes Minimum aufzuweisen, da er, weil ε_1, ε_2 aufser O keinen Punkt gemein haben, nicht verschwinden kann. Ist A_1OA_2 (Fig. 13) dieses absolute Minimum, so steht die

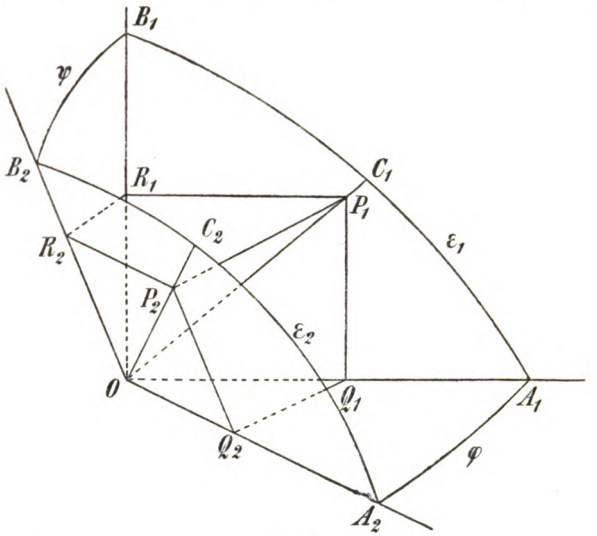


Fig. 13.

Ebene A_1OA_2 im Sinne der Stereometrie auf den beiden Ebenen ε_1, ε_2 senkrecht.

Aufgabe 84. Weshalb[36a] ist es notwendig, hier die Beschränkung „im Sinne der Stereometrie“ hinzuzufügen?

Wir bemerken nun, dafs die gefundene Ebene A_1OA_2 immer zu einer zweiten Ebene B_1OB_2 der nämlichen Beschaffenheit führt. Errichtet man nämlich im Punkte O der Schnittlinie OA_1 der zu einander stereometrisch normalen Ebenen ε_1 und A_1OA_2 ein in ε_1 liegendes Lot OB_1, so steht diese Gerade OB_1 bekanntlich auf der Ebene A_1OA_2 und also auch auf der Gerade OA_2 senkrecht; ebenso steht, wenn A_2OB_2 in ε_2 ein rechter Winkel ist, OB_2 auch senkrecht auf OA_1. Also ist jede der beiden Geraden OA_1, OA_2 senkrecht zu jeder der beiden Geraden OB_1, OB_2 und deshalb auch zu der Ebene B_1OB_2; d. h.

Digitized by Google

auch die Ebene B_1OB_2 ist zu den Ebenen ε_1, ε_2 stereometrisch normal. Es bilden also im R_4 zwei beliebig gewählte Ebenen ε_1, ε_2 zwei Winkel A_1OA_2 und B_1OB_2 mit einander und diese Winkel liegen in Ebenen, welche im Sinne der mehrdimensionalen Geometrie normal zu einander sind.

Wir untersuchen nun weiter, ob es nicht noch eine dritte Ebene C_1OC_2 der nämlichen Beschaffenheit geben kann. Dazu projizieren wir irgend ein Rechteck $OQ_1P_1R_1$, von welchem die durch O gehenden Seiten und Diagonale auf OA_1, OB_1 und auf OC_1 fallen, auf ε_2. Die Projektion eines willkürlichen Rechtecks ist im allgemeinen ein Parallelogramm[42a]; weil der rechte Winkel A_1OB_1 sich als rechter Winkel A_2OB_2 projiziert, so ist die Projektion von $OQ_1P_1R_1$ wieder ein Rechteck $OQ_2P_2R_2$. Betrachten wir nun zuerst den besondern Fall der Gleichheit der Winkel $A_1OA_2 = \varphi$ und $B_1OB_2 = \psi$, so bemerken wir sofort, dafs diese Gleichheit die Ähnlichkeit der beiden Rechtecke bedingt; denn die Gleichheit der Winkel φ, ψ hat zur Folge, dafs die Seiten OQ_1, OR_1 bei der Projektion im nämlichen Verhältnisse verkürzt werden. Und diese Ähnlichkeit der Rechtecke läfst auf die Gleichheit der Winkel Q_1OP_1 und Q_2OP_2 schliefsen; d. h. für $\psi = \varphi$ hat irgend eine durch O gehende Gerade OC_1 von ε_1 auf ε_2 diejenige Gerade OC_2 zur Projektion, welche durch die Bedingung der Gleichheit der Winkel A_1OC_1 und A_2OC_2 bestimmt wird. Dann aber ist auch die Beziehung zwischen OC_1 und OC_2 wechselseitig und OC_1 wieder die Projektion von OC_2 auf ε_1; d. h. für $\varphi = \psi$ ist die Ebene durch irgend eine durch O gehende Gerade OC_1 von ε_1 und die Projektion OC_2 dieser Gerade auf ε_2 nicht nur zu ε_2, sondern auch zu ε_1 stereometrisch normal. Und aus der Ähnlichkeit der Rechtecke kann dann noch abgeleitet werden, dafs OP_1 bei der Projektion im nämlichen Verhältnisse verkürzt wird wie OQ_1 und OR_1, d. h. dafs der Winkel C_1OC_2 ebenfalls den Wert φ hat.

Nimmt man hingegen an, die spitzen Winkel φ, ψ seien ungleich und φ sei als absolutes Minimum der kleinere, so findet man, dafs OQ_1 sich weniger verkürzt als OR_1 und von den spitzen Winkeln Q_1OP_1, Q_2OP_2 der erstere also der gröfsere ist. Projiziert man nun die Projektion $OQ_2P_2R_2$ auf ε_1 zurück, so erhält man ein drittes Rechteck $OQ'_1P'_1R'_1$,

Digitized by Google

aus welchem sich wegen der Ungleichheit $\varphi < \psi$ ebenso leicht ergiebt, dafs OQ_2 sich weniger verkürzt als OR_2 und von den spitzen Winkeln Q_2OP_2, $Q_1'OP_1'$ der erstere der gröfsere ist. Man hat also

$$\angle\, Q_1OP_1 > \angle\, Q_2OP_2 > \angle\, Q_1'OP_1',$$

d. h. OC_1 ist nicht mehr die Projektion von OC_2 auf ε_1 und die Ebene C_1OC_2 durch OC_1 und ihre Projektion OC_2 auf ε_2 steht nur auf ε_2, nicht auf ε_1 senkrecht. Sind die Winkel φ und ψ ungleich, so giebt es also nur zwei zu ε_1, ε_2 stereometrisch normale Ebenen. Wie man leicht zeigt, ist die Verkürzung der Diagonale OP_1 dann immer enthalten zwischen den Verkürzungen der Seiten des Rechtecks. Man hat also den Satz:

Sind im R_4 zwei Ebenen ε_1, ε_2 beliebig angenommen, so bilden diese Ebenen an ihrem Schnittpunkte O mit einander zwei spitze Neigungswinkel $A_1OA_2 = \varphi$ und $B_1OB_2 = \psi$, welche in zu einander normalen Ebenen liegen. Und läfst man eine in ε_1 liegende Gerade OC_1 den rechten Winkel A_1OB_1 durchstreifen, so ändert der von dieser Gerade mit ε_2 gebildete spitze Winkel kontinuierlich seinen Wert von φ bis ψ; d. h. φ und ψ vergegenwärtigen den Minimum- und den Maximumwert des von OC_1 mit ε_2 gebildeten Winkels. Nähert sich der Neigungswinkel φ der unteren Grenze 0^0, so fallen OA_1 und OA_2 zusammen; es haben die dann offenbar zu einander halb parallelen Ebenen eine Schnittlinie OA und es liegen diese Ebenen deshalb in einem Raume; es ist dann ψ der stereometrische Winkel der Ebenen und der Winkel $\varphi = 0$ bleibt aufser Betracht. Nähert sich der Neigungswinkel ψ der oberen Grenze 90^0, so steht OB_2 auf allen Geraden von ε_1 und OB_1 auf allen Geraden von ε_2 senkrecht und sind ε_1 und ε_2 zu einander halb normal. Ist zu gleicher Zeit $\varphi = 0^0$, $\psi = 90^0$, so sind die Ebenen im R_4 halb parallel und halb normal zu einander; dann können sie auch „stereometrisch normal" zu einander genannt werden. Sind die spitzen Winkel φ, ψ einander gleich, so giebt es eine unendliche Anzahl von gleichen Neigungswinkeln und bilden alle Geraden der einen Ebene mit ihren Projektionen auf die andere Ebene gleiche Winkel. Sind beide Winkel φ, ψ Null, so fallen die Ebenen zusammen. Und wenn beide Winkel φ, ψ rechte sind, so sind die Ebenen ε_1, ε_2 zu einander normal und bildet jede Gerade der einen Ebene mit allen Geraden der andern Ebene einen rechten Winkel.

Digitized by Google

Dieser Satz erwähnt nur alle Fälle, welche möglich sind, wenn die Ebenen mindestens einen eigentlichen Punkt gemein haben. Weiter unten[47 8,12] wird der Fall zweier Ebenen ohne gemeinsamen eigentlichen Punkt erörtert.

Aufgabe 85. Unter allen spitzen Winkeln C_1OC_2, welche von irgend einer Gerade OC_1 von ε_1 mit irgend einer Gerade OC_2 von ε_2 gebildet werden, ist φ absolutes Minimum und ψ relatives Minimum und relatives Maximum (Minimum rücksichtlich der Drehung eines einzigen Schenkels, Maximum für Winkel, die entweder in zu ε_1 oder ε_2 stereometrisch normaler Ebene liegen). Wie heifst dies für $\varphi = \psi$?

Aufgabe 86. Zeige, dafs die Projektion irgend eines in ε_1 liegenden Kreises auf ε_2 eine Ellipse ist.

[Man betrachte zunächst (Fig. 13) den Kreis mit dem

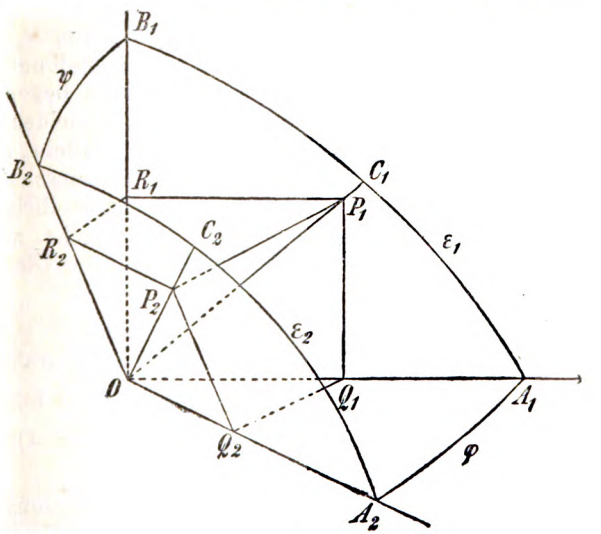


Fig. 13.

Mittelpunkt O und dem Radius OP_1 und bedenke, dafs jede der beiden Koordinaten OQ_1 und OR_1 des Kreispunktes P_1 sich bei der Projektion in einem bestimmten Verhältnisse verkürzt. Nachher mache man vom letzten Satze der Nr. 43 über equipollente ebene Figuren Gebrauch.

Digitized by Google

Wir bemerken, dafs der Quotient des Radius OP_1 in den Radiusvektor OP_2 der Ellipse die Verkürzung ist, welche OP_1 bei der Projektion in OP_2 erleidet; d. h. es sind die Radiivektores der Ellipse ein Mafs für die Verkürzungen der sich auf sie projizierenden Geraden von ε_1.]

Aufgabe 87. In welchem Falle ist die Projektion irgend eines in ε_1 liegenden Kreises auf ε_2 wieder ein Kreis? Und ist dann auch umgekehrt die Projektion irgend eines in ε_2 liegenden Kreises auf ε_1 ein Kreis?

47. **Die uneigentliche Gerade der Ebene eines Neigungswinkels.** Die Betrachtung der Bedingungen, welchen die uneigentliche Gerade der Ebene eines Neigungswinkels zweier Ebenen ε_1, ε_2 unterworfen ist, führt ebenfalls zur Anzahl „zwei" dieser Winkel. Es mufs nämlich diese uneigentliche Gerade offenbar die beiden uneigentlichen Geraden a_1, a_2 von ε_1, ε_2 und die ihnen im $\bar{U}_4$ von R_4 senkrecht zugeordneten Geraden a'_1 a'_2 schneiden, und nun giebt es zwei Geraden, welche vier in einem Raume liegende zu je zwei zu einander windschiefe Geraden schneiden (vergleiche Nr. 26 und die Aufgaben 50 und 65). Allein, sobald diese vier uneigentlichen Geraden drei gemeinschaftliche Transversalen zulassen, so giebt es deren unendlich viele und erfüllen diese bekanntlich eine Regelfläche zweiten Grades; dieser besondere Fall entspricht also der Gleichheit der Neigungswinkel φ, ψ.

Aufgabe 88. Ist die gefundene Regelfläche ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid?

[Was würde im $\bar{U}_4$ von R_4 den Unterschied bilden?]

Aufgabe 89. Was ist für $\psi = \varphi$ der Ort der einen Neigungswinkel tragenden Ebenen?

[Dieser Ort wird erhalten, wenn man alle Erzeugenden der obigen Regelfläche durch Ebenen mit O verbindet; er enthält also alle Geraden, welche durch O und irgend einen Punkt der uneigentlichen Regelfläche bestimmt werden.]

Wird eine der beiden Ebenen ε_1, ε_2 oder werden diese beiden Ebenen parallel zu sich selbst verschoben, so ändert sich keine der vier uneigentlichen Geraden a_1, a_2, a'_1, a'_2. Es werden also die gemeinschaftlichen Transversalen auch

Digitized by Google

nicht von dieser Bewegung von ε_1, ε_2 beeinflufst, d. h. bei paralleler Verschiebung von ε_1, ε_2 behalten die Schenkel der Neigungswinkel ihre Richtung, die Ebenen dieser Winkel ihre Stellung und die Winkel selbst ihre Grösse unverändert bei.

Aufgabe 90. Was ergiebt sich, wenn man die parallele Verschiebung einer der zwei Ebenen so weit fortsetzt, bis der gemeinschaftliche Punkt O der Ebenen ins Unendliche verschwindet?

[Dann ist die verschobene Ebene eine uneigentliche Ebene geworden; weshalb?]

Aufgabe 91. Von zwei gegebenen Ebenen ε_1, ε_2, welche nur einen uneigentlichen, keinen eigentlichen Punkt mit einander gemein haben, wird ε_1 parallel zu sich selbst verschoben, bis sie durch einen eigentlichen Punkt von ε_2 geht. Zu beweisen, dafs ε_1, ε_2 dann in einem dreidimensionalen Raume liegen.

Aufgabe 92. Kann die Unveränderlichkeit von Richtung und Stellung der Schenkel und der Ebenen der Neigungswinkel der sich parallel verschiebenden Ebenen ε_1 und ε_2 nicht auch aus den Minimumeigenschaften dieser Winkel abgeleitet werden?

[Mit Hilfe der Definition des Winkels zweier zu einander windschiefer Geraden.]

Schneidet a_1 insbesondere entweder a_2' oder a_2 (Fig. 14), so wird auch a_1' entweder a_2 oder a_2' begegnen müssen, und

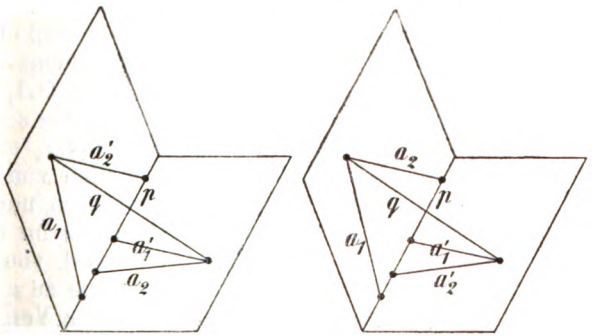


Fig. 14.

Digitized by Google

bestehen die gemeinschaftlichen Transversalen aus der Schnittlinie p der „Ebenen durch zwei Geraden“ und der Verbindungslinie q der „Punkte in zwei Geraden“. Im ersteren Falle sind ε_1, ε_2 zu einander halb normal und enthält die Ebene Oq einen rechten Neigungswinkel. Im zweiten Falle sind ε_1, ε_2 halb parallel und hat man also zu unterscheiden, ob sie aufser dem uneigentlichen Schnittpunkte von a_1 und a_2 noch einen eigentlichen Punkt O gemein haben oder nicht; d. h. ε_1 und ε_2 liegen bereits in einem Raume, oder sie werden dieser Eigenschaft erst teilhaftig mittels paralleler Verschiebung einer von ihnen. Liegen ε_1, ε_2 in einem Raume, so liefert die Ebene durch p und irgend einen Punkt O der Schnittlinie den gewöhnlichen Neigungswinkel der Stereometrie und bleibt der in der Ebene Oq liegende rechte Winkel zwischen der Schnittlinie und dem in O auf dem Raume $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ errichteten Lote aufser Betracht. In Verbindung mit den obigen Entwickelungen über den Einfluss einer parallelen Verschiebung von ε_1 und ε_2 reden wir bei zwei im R_4 liegenden Ebenen, welche nur einen uneigentlichen, keinen eigentlichen Punkt gemein haben, auch nur von einem Neigungswinkel.

Wir bemerken, dafs sich im besonderen Falle zweier zu einander stereometrisch normaler Ebenen ε_1, ε_2 ein Unterschied kundgiebt zwischen den Resultaten der vorhergehenden und der neuen Betrachtung, indem der beiseite gelassene Winkel zuerst als verschwindender, nachher als rechter Winkel erscheint. Diese Divergenz erklärt sich leicht aus der Verschiedenheit des Standpunktes. Es ist der Winkel A_1OA_2 der Bedingung unterworfen, dafs er bei Drehung eines der beiden Schenkel im diesen Schenkel enthaltenden Raume sich vergrössert. Diese Bedingung deckt sich *immer* mit der andern, dass von OA_1 und OA_2 jede die Projektion der andern ist, aber nur *im allgemeinen* mit der folgenden, dafs die Ebene A_1OA_2 zu ε_1 und ε_2 stereometrisch normal sei. Denn beim Zusammenfallen von OA_1 und OA_2 in OA wird die zu ε_1, ε_2 stereometrisch normale Ebene durch OA im R_4 unbestimmt und giebt es im durch ε_1 und ε_2 bestimmten Raume für $\psi < 90^0$ zwei von einander verschiedene Ebenen durch OA, deren eine zu ε_1, und deren andre zu ε_2 normal ist. Es läuft dieser Vergleich also hierauf hinaus, dass es geboten erscheint, im behandelten.

Digitized by Google

besondern Falle den Winkel φ aufser Betracht zu lassen und nur von dem stereometrischen Winkel ψ der beiden Ebenen zu reden.

Aufgabe 93. Weshalb wird der Fall, dafs a_1 und a'_1 sich schneiden, nicht betrachtet?

Aufgabe 94. Die zwei gemeinschaftlichen Transversalen von vier zu einander windschiefen Geraden können bekanntlich konjugiert imaginär sein. Kann dies auch bei den vier uneigentlichen Geraden a_1, a_2, a'_1, a'_2 der Fall werden?

[Die Antwort lautet verneinend; weshalb?]

48. **Die Winkel zweier Räume R_{d_1} und R_{d_2}.** Wir setzen zunächst voraus, dafs die im R_n gegebenen Räume R_{d_1} und R_{d_2} nur einen eigentlichen Punkt O gemein haben. Ist dann wieder OA_1 irgend eine Gerade von R_{d_1} durch O, OA_2 irgend eine Gerade von R_{d_2} durch O, so stellt sich beim Winkel A_1OA_2 offenbar ein absolutes Minimum ein; denn dieser Winkel kann nicht verschwinden, weil R_{d_1}, R_{d_2} aufser O keinen Punkt gemein haben. Ist A_1OA_2 (Fig. 15) dieses absolute Minimum, so ist OA_1 die Projektion von OA_2 auf R_{d_1} und OA_2 die Projektion von OA_1 auf R_{d_2}, d. h. die Ebene A_1OA_2 ist zu den Räumen R_{d_1}, R_{d_2} halb normal und $A_1OA_2 = \varphi$ bildet einen Winkel dieser Räume.

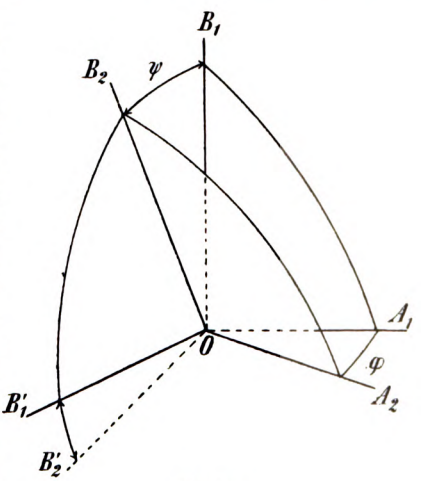


Fig. 15.

Wir denken uns nun in R_{d_1} den in O zu OA_1 normalen Raum R_{d_1-1}, in R_{d_2} den in O zu OA_2 normalen Raum R_{d_2-1} und betrachten den von einer Gerade OB_1 von R_{d_1-1} mit einer Gerade OB_2 von R_{d_2-1} gebildeten Winkel B_1OB_2. Dieser Winkel läfst wieder ein absolutes Minimum zu und die Ebene dieses minimalen Winkels ist zu den Räumen R_{d_1-1}, R_{d_2-1} halb normal. Steht nun in dieser Ebene B_1OB_2

Digitized by Google

(Fig. 15) OB_1' auf OB_1 und OB_2' auf OB_2 senkrecht, so ist OB_1' zu R_{d_1-1} und OA_1, d. h zu R_{d_1}, und OB_2' zu R_{d_2-1} und OA_2, d. h. zu R_{d_2} normal; also ist die Ebene B_1OB_2 zu den Räumen R_{d_1}, R_{d_2} halb normal und $B_1OB_2 = \psi$ ein Winkel dieser Räume. Weil die Ebene A_1OA_2 zu R_{d_1-1} halb normal ist, so sind die Ebenen A_1OA_2 und A_1OB_1 zu einander stereometrisch normal; und weil OA_1 auf R_{d_1-1} senkrecht steht, so steht OB_1 in O senkrecht auf der Schnittlinie OA_1 der Ebenen A_1OB_1 und A_1OA_2, und also auch auf der Ebene A_1OA_2. Ebenso wird bewiesen, dafs OB_2 zu der Ebene A_1OA_2 normal ist. Deshalb sind die Ebenen A_1OA_2 und B_1OB_2 der beiden Neigungswinkel senkrecht zu einander.

Wir denken uns nun weiter im R_{d_1} den in O zur Ebene A_1OB_1 senkrechten Raum R_{d_1-2}, im R_{d_2} den im O zur Ebene A_2OB_2 senkrechten Raum R_{d_2-2}, und betrachten den von einer Gerade OC_1 von R_{d_1-2} mit einer Gerade OC_2 von R_{d_2-2} gebildeten Winkel. Auch dieser Winkel läfst ein absolutes Minimum zu, und die Ebene dieses minimalen Winkels C_1OC_2 steht in O auf R_{d_1-2}, R_{d_2-2} halb normal. Mit Hilfe der in dieser Ebene auf OC_1 und OC_2 errichteten Lote OC_1' und OC_2' wird dann wieder gezeigt, dafs diese Ebene C_1OC_2 auch zu R_{d_1}, R_{d_2} halb normal ist, d. h. dafs der Winkel $C_1OC_2 = \chi$ Winkel von R_{d_1}, R_{d_2} ist. Da die Ebenen A_1OA_2 und B_1OB_2 zu R_{d_1-2} halb normal sind, so sind einerseits A_1OA_2 und A_1OC_1, andererseits B_1OB_2 und B_1OC_1 zu einander stereometrisch normal; da OA_1 und OB_1 auf R_{d_1-2} senkrecht stehen, so steht OC_1 also in O senkrecht auf der Schnittlinie OA_1 der Ebenen A_1OC_1 und A_1OA_2 und auf der Schnittlinie OB_1 der Ebenen B_1OC_1 und B_1OB_2, d. h. auf den Ebenen A_1OA_2 und B_1OB_2. Ebenso findet man, dafs OC_2 in O_2 auf diesen Ebenen senkrecht steht. Oder kürzer gefafst: man beweist, dafs die Ebene C_1OC_2 auf den Ebenen A_1OA_2 und B_1OB_2 senkrecht steht, indem man für C_1OC_2 in Bezug auf A_1OA_2 und B_1OB_2 den für B_1OB_2 in Bezug auf A_1OA_2 gegebenen Beweis wiederholt. Deshalb stehen die Ebenen der drei Neigungswinkel A_1OA_2, B_1OB_2, C_1OC_2 zu je zweien in O auf einander senkrecht.

Es leuchtet unmittelbar ein, wie man auf diese Weise fortfahren kann, bis einer der Schenkel des veränderlichen

Digitized by Google

Winkels seine Beweglichkeit ganz verloren hat. Für $d_1 < d_2$ tritt dieser Fall beim in R_{d_1} liegenden Schenkel ein, nachdem man $d_1 - 1$ Winkel aufgefunden hat. Die oben schon gegebene Lösung[45b] des dann noch übrig bleibenden Problems der Bestimmung des Winkels, welchen eine im R_{d_1} gegebene Gerade OG_1 mit einem im R_{d_2} gegebenen Raume $R_{d_2 - d_1 + 1}$ bildet, ergänzt die Zahl der Neigungswinkel von R_{d_1} und R_{d_2} zu d_1. Es gilt also folgender allgemeine Satz:

Sind die Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$ im R_n $(n \geqq d_1 + d_2)$ beliebig durch den Punkt O gelegt, so bilden sie an diesem Punkte mit einander d_1 verschiedene Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{d_1}$, deren Ebenen zu je zweien in diesem Punkte senkrecht zu einander sind.

Man kann dem bis jetzt gelösten Probleme leicht eine mehr symmetrische Gestalt geben. Denn die Bemerkung, dafs von den Schenkeln irgend eines Neigungswinkels jeder die Projektion des andern sein mufs, zeigt, dafs die Beweglichkeit des Schenkels OA_2 von vorne herein beschränkt bleiben kann auf den Raum R'_{d_1}, welcher die Projektion von R_{d_1} auf R_{d_2} bildet. Die Bestimmung der Winkel der durch O gehenden Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$ ist also mit der Bestimmung der Winkel zwischen R_{d_1} und R'_{d_1} identisch. Wie R_{d_1} bestimmt ist durch das von den in ihm enthaltenen Schenkeln der Neigungswinkel gebildete rechtwinklige Koordinatensystem $O(A_1, B_1, C_1, \ldots)$, so ist auch R'_{d_1} bestimmt durch das rechtwinklige Koordinatensystem $O(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ der in R_{d_2} liegenden Schenkel. Und die Achsen dieser beiden Systeme entsprechen einander eindeutig derart, dafs zwei einander entsprechende Achsen einen Neigungswinkel, zwei einander nicht entsprechende Achsen immer einen rechten Winkel einschliefsen.

Aufgabe 95. In einem R_6 sind zwei Räume R_3 und R'_3 beliebig gewählt. Zu zeigen, dafs irgend eine Kugel von R_3 sich als ein Ellipsoid auf R'_3 projiziert.

[Projiziert sich das rechtwinklige Koordinatensystem $O(A_1, B_1, C_1)$ als das rechtwinklige Koordinatensystem $O(A_2, B_2, C_2)$ und der Punkt P_1 mit den Koordinaten OQ_1, OR_1, OS_1 als P_2 mit den Koordinaten OQ_2, OR_2, OS_2, so ergiebt sich mittels der Betrachtung der Verkürzungen der Koordinaten, dafs eine um O als Mittelpunkt beschriebene

Digitized by Google

Kugel sich als ein Ellipsoid mit auf OA_2, OB_2, OC_2 fallenden Achsen projiziert. Und der Übergang zum Falle einer Kugel mit beliebig gewähltem Mittelpunkte wird mittels des letzten Satzes von Nr. 44 bewirkt.

Die Radiivektores OP_2 des Ellipsoids, welches die Projektion der mit der Einheit als Radius um O geschlagenen Kugel bildet, geben die Verkürzungen der sich auf sie projizierenden Geraden von R_3 an.]

Die Betrachtung der Bedingungen, denen die uneigentliche Gerade der Ebene eines Neigungswinkels der durch O gehenden Räume R_{d_1} und R_{d_2} unterworfen ist, führt nicht so leicht zur Anzahl dieser Winkel. Auch nachdem wir R_{d_2} durch die Projektion R'_{d_1} von R_{d_1} auf R_{d_2} und R_n durch den durch R_{d_1} und R'_{d_1} bestimmten Raum R_{2d_1} ersetzt haben — wobei d_1 weiter ohne Index geschrieben werden kann —, bleibt die Bestimmung der in Rede stehenden uneigentlichen Gerade noch immer eine schwierige Aufgabe. Steht in der Ebene irgend eines Neigungswinkels $\varphi_i = A_iOB_i$ (Fig. 16) OA'_i senkrecht auf OA_i und OB'_i senkrecht auf OB_i, sind ferner $\overline{U}_d$, $\overline{U}'_d$ die uneigentlichen Räume von R_d, R'_d und $\overline{V}_d$, $\overline{V}'_d$ ihnen senkrecht zugeordnet im $\overline{U}_{2d}$ von R_{2d}, so muſs $\overline{U}_d$ von OA_i, $\overline{U}'_d$ von OB_i, $\overline{V}_d$ von OA'_i und $\overline{V}'_d$ von OB'_i geschnitten werden und die gesuchte uneigentliche Gerade also gemeinschaftliche Transversale sein von vier in $\overline{U}_{2d}$ liegenden Räumen mit dem Punktwerte d, welche zu je zweien zu einander windschief sind. Wird nun allgemein bewiesen, daſs es in einem Raume R_{2d-1} eine Anzahl von d Geraden giebt, welche mit jedem von vier zu einander windschiefen Räumen R_{d-1} einen Punkt gemein haben, so fördert die Anwendung dieses Resultates auf den Fall der vier Räume $\overline{U}_d$ im $\overline{U}_{2d}$ die d durch O gehenden Ebenen der Neigungswinkel zu Tage. Wir kommen später auf dieses Problem zurück.

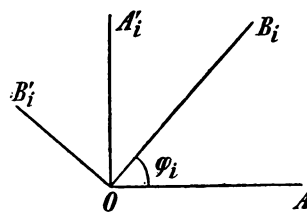


Fig. 16.

Aufgabe 96. Beweise, daſs die vier oben erwähnten Räume $\overline{U}_d$ zu je zweien windschief zu einander sind.

Digitized by Google

49. **Besondere Fälle.** Wir wollen nun der verschiedenen besonderen Fälle Erwähnung thun, indem wir jetzt voraussetzen, dafs die im R_n durch O gegebenen Räume R_{d_1} und R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$ ihre Stellung kontinuierlich so geändert haben, dafs die d_1 Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{d_1}$ die in der Tabelle

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{\delta_0} = 0^0,\\
&\varphi_{\delta_0+1} = \varphi_{\delta_0+2} = \ldots = \varphi_{\delta_0+\delta_1} = \psi_1,\\
&\varphi_{\delta_0+\delta_1+1} = \varphi_{\delta_0+\delta_1+2} = \ldots = \varphi_{\delta_0+\delta_1+\delta_2} = \psi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots

Die andern besonderen Eigenschaften, welche durch das oben gegebene Winkelsystem bedingt sind, verstehen sich von selbst. Die Gleichheit der Neigungswinkel φ_{δ_0+1}, φ_{δ_0+2}, ... $\varphi_{\delta_0+\delta_1}$ ist Ursache, dafs irgend eine durch O gehende Gerade g des Raumes R_{δ_1}, welcher durch die in R_{d_1} liegenden Schenkel OA dieser Winkel bestimmt wird, mit ihrer Projektion auf R_{d_2} den nämlichen Winkel ψ_1 bildet. Und weil die Winkeltabelle δ_k rechte Winkel enthält, so ist R_{d_1} zum Grade $\frac{\delta_k}{d_1}$ zu R_{d_2} senkrecht.

Es ist kaum notwendig, noch hinzuzufügen, dafs der Fall zweier Räume ohne gemeinsamen eigentlichen Punkt mittels paralleler Verschiebung eines von ihnen erledigt werden kann.

Aufgabe 97. In welchem Falle ist die Projektion irgend einer in einem gegebenen Raume liegenden Kugel auf einen zweiten gegebenen Raum ein verkürztes oder verlängertes Umdrehungsellipsoid, oder wieder eine Kugel?

50. **Die Winkel der zu R_{d_1} und R_{d_2} normalen Räume.** Wir beweisen nun folgenden allgemeinen Satz:

Dreht man die von zwei gegebenen Räumen R_{d_1}, R_{d_2} am Punkte O gebildeten Winkel φ_1, φ_2, ... in ihren Ebenen ε_1, ε_2, ... um O um einen rechten Winkel, so erhält man die Winkel φ_1', φ_2', ..., welche die zwei in O zu R_{d_1}, R_{d_2} normalen Räume R_{n-d_1}, R_{n-d_2} in O mit einander bilden.

Geht nämlich der in der Ebene ε liegende Winkel $\varphi = A_1OA_2$ von R_{d_1}, R_{d_2}, von dessen Schenkeln OA_1 in R_{d_1}, OA_2 in R_{d_2} liegen mag, durch diese Drehung über in $\varphi' = A_1'OA_2'$, so folgt aus der Definition der Winkel zweier Räume, dafs φ' ein Winkel von R_{n-d_1}, R_{n-d_2} ist. Weil φ ein Winkel ist von R_{d_1}, R_{d_2}, so mufs die uneigentliche Gerade der diesen Winkel enthaltenden Ebene ε die uneigentlichen Räume $\overline{U}_{d_1}$, $\overline{U}_{d_2}$, $\overline{U}_{n-d_1}$, $\overline{U}_{n-d_2}$ von R_{d_1}, R_{d_2}, R_{n-d_1}, R_{n-d_2} schneiden; deshalb gehören die uneigentlichen Punkte der Geraden OA_1, OA_2, OA_1', OA_2' den uneigentlichen Räumen $\overline{U}_{d_1}$, $\overline{U}_{d_2}$, $\overline{U}_{n-d_1}$, $\overline{U}_{n-d_2}$ an. Allein gerade deshalb ist nun auch $\varphi' = A_1'OA_2'$ ein Winkel von R_{n-d_1}, R_{n-d_2}.

Digitized by Google

Obenstehender Satz verlangt offenbar, dafs die Zahl der Winkel von R_{d_1}, R_{d_2} der Zahl der Winkel von R_{n-d_1}, R_{n-d_2} gleich sei, was leicht an und für sich bestätigt wird. Haben nämlich R_{d_1}, R_{d_2} $(d_1 \leqq d_2)$ den Raum $R_{d_{1,2}}$ gemein, so ist $d_1 - d_{1,2}$ die Zahl der Winkel dieser Räume. Und dann haben R_{n-d_1}, R_{n-d_2} $(n - d_1 \geqq n - d_2)$ einen Raum $R_{n+d_{1,2}-d_1-d_2}$ gemein, weil sie in einem zu $R_{d_{1,2}}$ senkrechten Raume $R_{n-d_{1,2}}$ liegen; also weisen dann R_{n-d_1}, R_{n-d_2}

$$n - d_2 - (n + d_{1,2} - d_1 - d_2),$$

d. h. auch $d_1 - d_{1,2}$ Winkel auf.

Allein, in den Anwendungen noch viel wichtiger ist die Beziehung zwischen den Winkeln φ der einen Punkt O gemein habenden Räume R_{d_1}, R_{d_2} und den Winkeln ψ, welche von R_{d_1} mit dem in O zu R_{d_2} normalen Raume R_{n-d_2} gebildet werden. Es gilt nämlich der allgemeine Satz:

Ersetzt man die von zwei gegebenen Räumen R_{d_1}, R_{d_2} am gemeinschaftlichen Punkte O gebildeten Winkel $\varphi_1 = A_1 O A_2$, $\varphi_2 = B_1 O B_2$, ... in ihren Ebenen durch ihre Komplemente $\psi_1 = A_1 O A'_2$, $\psi_2 = B_1 O B'_2$, ..., so erhält man die Winkel, welche R_{d_1} in O mit dem in O zu R_{d_2} normalen Raume R_{n-d_2} bildet.

Lenkt man seine Aufmerksamkeit wieder auf die uneigentliche Gerade der die Winkel φ_i, ψ_i tragenden Ebene, so ergiebt sich unmittelbar, dafs diese Ebene einen Neigungswinkel der Räume R_{d_1}, R_{n-d_2} enthalten mufs, u. s. w.

Wie man sieht, kann man auch mittels zweimaliger Anwendung des zweiten Satzes zum ersten gelangen.

51. **Die Winkelabstände in uneigentlichen Räumen.** Wie unmittelbar einleuchtet, haben zwei von einander verschiedene uneigentliche Punkte eine unendlich grofse Entfernung von einander, fallen also zwei in endlicher Entfernung von einander liegende uneigentliche Punkte mit einander zusammen. Doch kann man aus der Thatsache, dafs zwei verschiedene uneigentliche Punkte A_∞, B_∞ von irgend einem eigentlichen Punkte P aus unter einem von der Lage von P unabhängigen Winkel $A_\infty P B_\infty$ erscheinen, Anlafs nehmen, diesen Winkel als Winkelabstand oder kürzer

Digitized by Google

als Abstand der Punkte A_∞, B_∞ zu deuten. Es haben dann irgend zwei uneigentliche zu einander windschiefe Geraden u_∞, v_∞ zwei Abstände von einander; denn sie bestimmen mit irgend einem eigentlichen Punkte P zwei Ebenen (Pu_∞), (Pv_∞), welche aufser P keinen Punkt gemein haben und also zwei Winkel aufweisen.

Diese Gedankenreihe weiter verfolgend findet man, dafs irgend zwei Räume $\bar{U}_{d_1}$ und $\bar{U}_{d_2}$ im $\bar{U}_n$ sich rücksichtlich der durch sie bestimmten Winkelabstände ebenso verhalten wie die zwei eigentlichen Räume $R_{d_1} = (P, \bar{U}_{d_1})$ und $R_{d_2} = (P, \bar{U}_{d_2})$ rücksichtlich der durch sie bestimmten Winkel.

---

§ 5. Darstellende Geometrie.

52. **Projektionsachsen und Projektionsebenen.** Ist im R_n ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \ldots X_n)$ gegeben, so kann man irgend einen beliebig gewählten Punkt P senkrecht auf die Achsen $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ projizieren mittels durch P gehender auf diesen Achsen senkrecht stehender Räume R_{n-1}; sind $P_1, P_2, \ldots P_n$ die entsprechenden Projektionen von P, so sind $OP_1, OP_2, \ldots OP_n$ bekanntlich die Koordinaten von P. Ebenso kann man P auf die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Ebenen $O(X_1, X_2), O(X_1, X_3), \ldots O(X_{n-1} X_n)$ durch zwei Achsen projizieren, indem man durch P zu diesen Ebenen senkrechte Räume R_{n-2} legt; man erhält dann die Punkte $P_{1,2}, P_{1,3}, \ldots P_{n-1,n}$, welche derart mit den n Projektionen auf den Achsen zusammenhängen, dafs $OP_k P_{kl} P_l$ immer ein Rechteck ist. Diese Gedankenreihe weiter verfolgend, findet man die Projektionen von P auf die $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$ Räume durch drei Achsen mittels zu diesen Räumen senkrechter Räume R_{n-3}, wobei OP_{klm} immer die innere Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kanten OP_k, OP_l, OP_m ist, u. s. w.

Aufgabe 98. Welche Geraden bilden in den durch O gehenden Seitenflächen dieses Parallelepipeds die durch O gehenden Oberflächendiagonalen?

Digitized by Google

Da die gewöhnliche darstellende Geometrie uns in der Anwendung von Projektionsebenen geschult hat, so werden wir diese Methode auch hier besonders hervorheben. Jedoch wird es sich bisweilen nützlicher zeigen, von Projektionsräumen Gebrauch zu machen.

Von den drei Projektionen „Grundrifs, Aufrifs und Kreuzrifs“ des Raumes wird die dritte gewöhnlich nur in besonderen Fällen zu Hilfe gerufen. Im R_n kann man meistens mit einer Kette $O(X_1, X_2), O(X_2, X_3), \ldots O(X_{n-1}, X_n)$ von $n - 1$ Projektionsebenen auskommen. Diese Bemerkung erleichtert die Zusammenlegung der Projektionsebenen in eine Zeichnungsebene, welche wir „Bildebene“ nennen werden. Man denkt sich nämlich die beiden Endpunkte der Achsen $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ im Raume R_n (vergleiche Nr. 22) mit einem Zeichen behaftet und nimmt nun in einer Ebene (Fig. 17) zwei zu einander senkrechte Geraden an, wodurch man vier Halbstrahlen bekommt, welche man im positiven Drehungssinne fortschreitend mit den Namen $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ andeutet. Es kann dann, gleichgültig auf welche Weise die Zusammenklappung der $n - 1$ Projektionsebenen stattgefunden hat, die so erhaltene ebene Figur das Endergebnis darstellen, indem man annimmt, dafs jeder rechte Winkel $X_k O X_l$ dieser Ebene dem zwischen

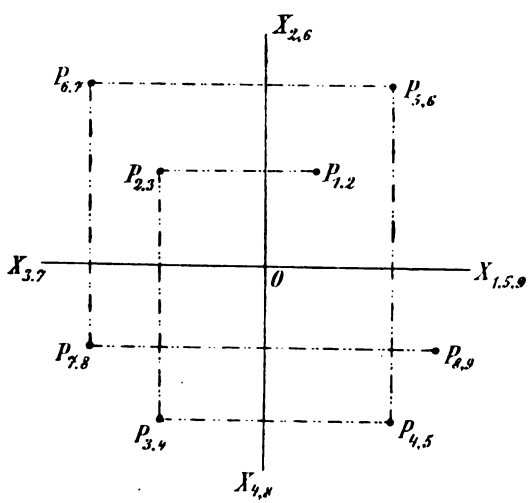


Fig. 17.

Digitized by Google

den positiven Achsen OX_k und OX_l liegenden Teile der Projektionsebene $O(X_k, X_l)$ entspricht. So giebt Fig. 17 das Resultat dieser Zusammenlegung der Projektionsebenen für den Fall eines Raumes R_9; in dieser Darstellung fallen die positiven Teile der Achsen OX_1, OX_5, OX_9 und die negativen Teile der Achsen OX_3, OX_7 auf einander, u. s. w.

Denkt man sich die acht Projektionen $P_{1,2}, P_{2,3}, \ldots P_{8,9}$ irgend eines Punktes P im R_9 aus den neun Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_9$ abgeleitet, so leuchtet unmittelbar ein, dafs die Verbindungslinie $P_{1,2}P_{2,3}$ auf OX_2 und im allgemeinen die Verbindungslinie $P_{k-1,k}P_{k,k+1}$ auf OX_k senkrecht steht. Denn die Projektionen von $P_{k-1,k}$ und $P_{k,k+1}$ auf OX_k fallen zusammen im Punkt P_k, für welchen $OP_k = x_k$ ist. Hieraus folgt dann weiter, dafs $P_{k-1,k}$ und $P_{k,k+1}$ im Sinne der gewöhnlichen darstellenden Geometrie wieder die Projektionen sind der Projektion $P_{k-1,k,k+1}$ von P auf den Raum $O(X_{k-1}, X_k, X_{k+1})$, u. s. w.

Die neun Koordinaten bestimmen die acht Projektionen des Punktes P, sowie überhaupt alle Projektionen dieses Punktes. Umgekehrt bestimmt irgend ein System von acht Projektionen $P_{1,2}, P_{2,3}, \ldots P_{8,9}$, zwischen denen die angedeuteten Lageverhältnisse obwalten, die Koordinaten von P und deshalb auch alle übrigen Projektionen von P. Allein es können, ohne dafs noch andere Projektionsebenen in die Bildebene umgeklappt werden, nur diejenigen neuen Projektionen hineingezeichnet werden, welche zwei, Modulo zwei, von einander verschiedene Indices tragen.

Aufgabe 99. Zeige, dafs man im vorliegenden Falle noch zwölf neue Projektionen erhalten kann.

Aufgabe 100. Beweise, dafs man in der angegebenen Weise $(n-1)^2$ neue Projektionen findet im R_{2n} und $n(n-1)$ im R_{2n+1}.

Da es natürlich ganz gleichgültig ist, welche der Achsen des angenommenen Koordinatensystems OX_1 genannt wird, welche OX_2, u. s. w., so ist auch die Folge $O(X_1, X_2)$, $O(X_2, X_3), \ldots O(X_{n-1}, X_n)$ der Projektionsebenen eine ganz willkürliche. So kann man im Beispiele von R_9 (Fig. 17) sogar die nämliche Anordnung der Achsenabbildung noch beibehalten, wenn mann OX_2 mit OX_6, OX_4 mit OX_8

Digitized by Google

vertauscht und also die Folge (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) durch (1, 6, 3, 8, 5, 2, 7, 4, 9) ersetzt.

53. **Die Darstellung des Punktes.** Mit jeder Projektion $P_{k,l}$ sind zwei Koordinaten x_k, x_l des Punktes P gegeben. Deshalb mufs es in einem Raume R_{2n} von gerader Dimensionenzahl immer möglich sein, irgend einen Punkt P mittels n von einander unabhängiger Projektionen $P_{k,l}$ zu bestimmen. Dabei ist dann unter zwei von einander unabhängigen Projektionen ein Paar Projektionen mit vier verschiedenen Indices zu verstehen; denn nur aus einem solchen Paare kann man vier der $2n$ Koordinaten ableiten. So bestimmen im R_8 (Fig. 18) die vier Projektionen $P_{1,2}$, $P_{3,4}$, $P_{5,6}$, $P_{7,8}$ den Punkt P unzweideutig. Beim Raume R_{2n+1} mit ungerader Dimensionenzahl kommt man natürlich mit von einander unabhängigen Projektionen $P_{k,l}$ nicht aus; dort kann man zu den von einander unabhängigen Projektionen $P_{1,2}, P_{3,4}, P_{5,6}, \ldots P_{2n-1,2n}$ entweder die noch unbenutzte x_{2n+1} als Kote (vergleiche die bei Terraindarstellungen im R_3 übliche Methode) oder die mit $P_{2n-1,2n}$ zusammenhängende Projektion $P_{2n,2n+1}$ hinzufügen. Allein, bei den *uneigentlichen* Punkten reichen, wie wir nachher zeigen wollen, die angewiesenen Hilfsmittel nicht aus und mufs man[68a] andere Projektionen hinzunehmen.

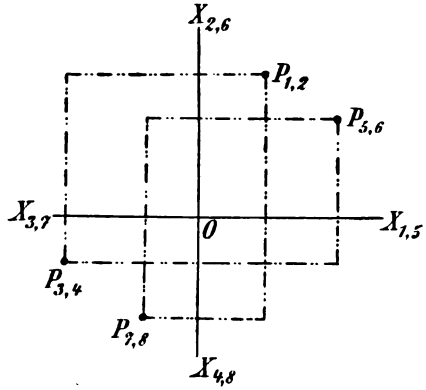


Fig. 18.

Wenn die Zahl der Dimensionen neun nicht übersteigt, so schreiben wir fernerhin im Texte und in den Figuren P_{12} statt $P_{1,2}$, X_{159} statt der Abkürzung $X_{1,5,9}$ für X_1, X_5, X_9, u. s. w.

Aufgabe 101. Wendet man im R_{2n+1} die $n+1$ erwähnten Projektionen an, so ist der Ort der Punkte P mit

Digitized by Google

zusammenfallenden Projektionen, sowohl im R_{2n+1} wie im R_{2n}, immer eine Ebene.

[Für den Raum R_{2n} wird der Ort durch die Bedingungen

$$x_1 = -x_3 = x_5 = -\ldots = (-1)^{n-1} x_{2n-1},$$
$$x_2 = -x_4 = x_6 = -\ldots = (-1)^{n-1} x_{2n}$$

bestimmt; d. h. es ist die Projektion des Ortes auf jeden der zwei zu einander normalen Räume R_n, welche die Koordinatensysteme $O(X_1 X_3 \ldots X_{2n-1})$, $O(X_2 X_4 \ldots X_{2n})$ enthalten, eine Gerade durch O, woraus hervorgeht, dafs der Ort selber die durch diese Geraden gehende Ebene ist. Und im Raume R_{2n+1} wird der erste Raum R_n durch einen Raum R_{n+1} ersetzt, u. s. w.]

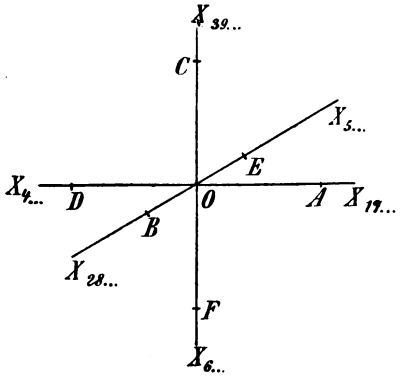


Fig. 19.

Will man bei der Darstellung des Punktes dreidimensionale Modelle zur Anwendung bringen, so kann man (Fig. 19) drei zu je zweien zu einander senkrechte Geraden AD, BE, CF annehmen und die sechs so erhaltenen Halbstrahlen, z. B. in einer sich immer wiederholenden Reihenfolge OA, OB, OC, OD, OE, OF, mit den Namen $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ andeuten. Man kann dann wieder annehmen, dafs die Kette von Räumen $O(X_1 X_2 X_3)$, $O(X_2 X_3 X_4)$, $\ldots O(X_{n-2} X_{n-1} X_n)$ von R_n sich in unserm Raume, welcher nun als „Bildraum“ auftritt, derart zusammengelegt hat, dafs die in diesem Bildraume erhaltenen Trieder $O(X_{k-1} X_k X_{k+1})$ dem zwischen den positiven Achsen OX_{k-1}, OX_k, OX_{k+1} liegenden Achtel des Koordinatenraumes $O(X_{k-1} X_k X_{k+1})$ entsprechen. So findet man, dafs ein Punkt im R_{3n} durch seine n Projektionen $P_{123}, P_{456}, \ldots P_{3n-2,\,3n-1,\,3n}$ bestimmt wird und man bei Räumen R_{3n+1} und R_{3n+2} entweder zu Koten oder zu abhängigen Projektionen zu greifen hat.

Aufgabe 102. Der Ort der Punkte P mit zusammen-

Digitized by Google

fallenden Raumprojektionen R_{123}, R_{456}, u. s. w. ist immer ein Raum.

Natürlich würde es Geometern, welche in einem vierdimensionalen Raume lebten, möglich sein, die Projektionen P_{1234}, u. s. w. auf die Räume $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$, u. s. w. mit vier Dimensionen zur Abbildung von P zu benutzen. Auf diese mehrdimensionalen Bildräume gehen wir hier nicht weiter ein.

54. **Die Darstellung der Gerade.** Man sieht sofort ein, dafs die $n-1$ Projektionen einer beliebig gewählten Gerade g von einander unabhängig sind und umgekehrt $n-1$ willkürlich angenommene Projektionen g_{12}, g_{23}, $\cdots$ $g_{n-1,n}$ also eine Gerade g bestimmen. Wirklich ist den $n-1$ Räumen R_{n-1}, von welchen der erste in g_{12} senkrecht auf $O(X_1 X_2)$, der zweite in g_{23} senkrecht auf $O(X_2 X_3)$, u. s. w. und der letzte in $g_{n-1,n}$ senkrecht auf $O(X_{n-1} X_n)$ steht, nur eine Gerade gemeinsam. Natürlich treten Ausnahmen ein, sobald zwei der projizierenden Räume R_{n-1} zusammenfallen, drei dieser Räume R_{n-1} einen Raum R_{n-2}, vier dieser Räume R_{n-1} einen Raum R_{n-3} gemein haben, u. s. w. Stehen z. B. g_{12} und g_{23} im nämlichen Punkte von OX_2 auf OX_2 senkrecht, so fallen die entsprechenden projizierenden Räume R_{n-1} zusammen; steht g_{12} auf OX_2, g_{34} auf OX_3 senkrecht, und ist g_{23} der Schnittpunkt von g_{12}, g_{34}, so haben die drei entsprechenden projizierenden Räume den im Punkte g_{23} zu $O(X_2 X_3)$ senkrechten Raum R_{n-2} gemein, u. s. w.

55. **Die Lageverhältnisse der Gerade im R_4.** Um zu verhindern, dafs wir uns hier in Allgemeinheiten verlieren, setzen wir jetzt voraus, dafs der Operationsraum ein R_4 sei, in welchem Falle die geschlossene Kette der Projektionen $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}$ irgend eines Punktes P (Fig. 20) die Eckpunkte eines Rechtecks bilden, und untersuchen bei dieser einfachsten Annahme die überhaupt möglichen Lagen der Gerade. Die Abzählung dieser verschiedenen Lagen wird mittels Betrachtung der Stelle, welche der uneigentliche Punkt der Gerade in Bezug auf das von den uneigentlichen Punkten der vier Achsen gebildete Lotviereck[35b] einnimmt, sehr erleichtert. Es kann nämlich dieser Punkt entweder willkürlich, oder auf einer Kante, oder in einer Seitenfläche, oder aber in einem Eck-

Digitized by Google

punkte des Tetraeders liegen, welches den Eckpunkten nach mit dem Lotvierecke identisch ist. So finden wir die Fälle:

a) Die Lage von g ist willkürlich (Fig. 20).

b) Die Gerade g ist einem Projektionsraume parallel und also auf der gegenüberstehenden Achse senkrecht (Fig. 21, 22); es ist dann zur Bestimmung von g durch Projektionen notwendig, die nun noch willkürliche Projektion g_{41} herbeizuschaffen.

Wir übergehen die Fälle, wo g entweder zu OX_1 oder zu OX_4 normal ist, und bemerken nur, dafs g_{12}, g_{23}, g_{34} dann wieder zur Bestimmung von g hinreichen.

c) Die Gerade g ist zu einer Projektionsebene parallel und also auf der gegenüberliegenden Projektionsebene senk-

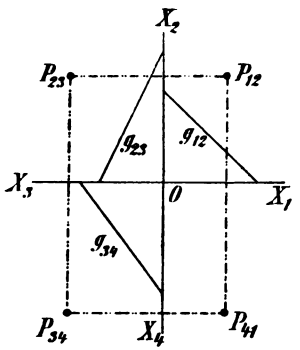


Fig. 20.

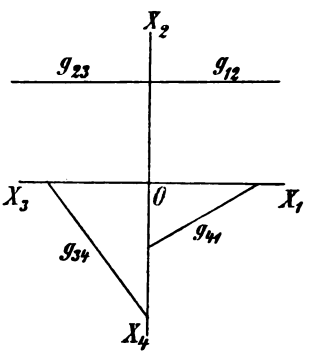


Fig. 21.

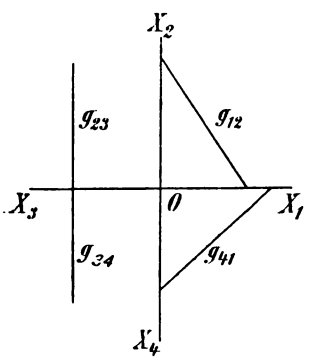


Fig. 22

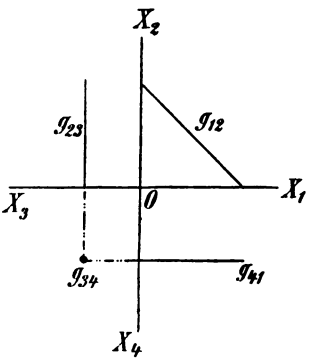


Fig. 23.

Digitized by Google

recht. Hier erhält man zwei verschiedene Fälle, je nachdem diese zwei Projektionsebenen unter den vier verwendeten Projektionsebenen sich vorfinden oder nicht. Ist g zur Ebene $O(X_1 X_2)$ parallel (Fig. 23), so ist ihre Projektion g_{34} ein Punkt und steht die durch diesen Punkt gehende Projektion g_{23} auf OX_3 senkrecht. Ist g zur Ebene $O(X_1 X_3)$ parallel (Fig. 24), so reichen sogar die vier Projektionen g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{41} zu ihrer Bestimmung nicht aus und mufs man, wenn man g bestimmen will, entweder zwei Punkte P, Q auf g annehmen, oder aber die Projektionsebene $O(X_1 X_3)$ in die Bildebene umklappen und die Projektion g_{13} hierin willkürlich wählen.

d) Die Gerade g ist zu einer Projektionsachse parallel und also zum gegenüberliegenden Projektionsraume normal (Fig. 25).

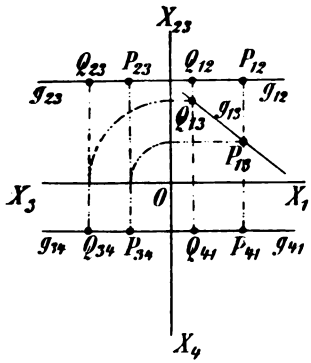


Fig. 24.

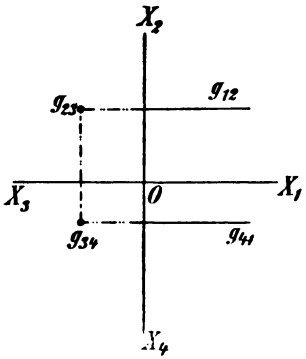


Fig. 25.

Aufgabe 103. Zeichne die Projektionen der Gerade g in den Fällen *b*), *c*), *d*), nachdem „parallel zu“ durch „liegend in“, ersetzt worden ist.

56. **Spurenbestimmung der Gerade.** Wir bestimmen nun die Schnittpunkte oder Spuren einer durch ihre Projektionen gegebenen Gerade g (Fig. 26) mit den Projektionsräumen.

Falls die Projektionen g_{12}, g_{23}, g_{34} eine Gerade g bestimmen, erhält man die Projektionen eines Punktes P von g,

Digitized by Google

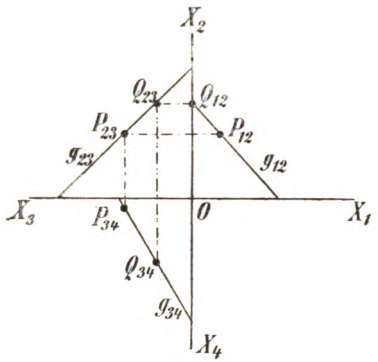


Fig. 26.

wenn man P_{12}, P_{23}, P_{34}, den Gesetzen der Abhängigkeit von P_{23} mit P_{12} und P_{34} entsprechend, auf den gleichnamigen Projektionen g_{12}, g_{23}, g_{34} der Gerade beliebig wählt. Hat man z. B. P_{23} in g_{23} beliebig angenommen, so sind P_{12} auf g_{12} und P_{34} auf g_{34} durch die Bedingungen der Abhängigkeit zu gleicher Zeit mitbestimmt.

Handelt es sich nun um den Schnittpunkt Q der Gerade g mit dem Projektionsraume $O(X_2X_3X_4)$, oder $x_1 = 0$, welchen wir die erste Spur von g nennen, so mufs Q_{12} in der Achse OX_2 gesucht werden; denn für diesen Punkt ist $x_1 = 0$. Aus Q_{12} wird dann in bekannter Weise zuerst Q_{23}, nachher Q_{34} abgeleitet. Und ebenso findet man die zweite, dritte, vierte Spur R, S, T mit Hilfe der Bemerkungen, dafs R_{12} in OX_1 (und R_{23} in OX_3), S_{23} in OX_2, T_{34} in OX_3 liegt. Bestimmt man nun von diesen Spuren Q, R, S, T die Projektionen auf $O(X_4X_1)$, so liegen diese in der nämlichen Gerade g_{41}.

Das Doppelverhältnis $(QRST)$ der vier Spuren ist jedem der vier Doppelverhältnisse $(Q_{k,l}R_{k,l}S_{k,l}T_{k,l})$ gleich; also sind irgend zwei dieser vier Doppelverhältnisse auch einander gleich. Wirklich werden z. B. $(QRST)$, $(Q_{12}R_{12}S_{12}T_{12})$, $(Q_{23}R_{23}S_{23}T_{23})$ von vier zu $O(X_1X_3X_4)$ parallelen Räumen auf g, g_{12}, g_{23} eingeschnitten.

Aufgabe 104. Zeige, dafs g die Ebene $O(X_3X_4)$ schneidet, wenn g_{12} durch O geht.

Aufgabe 105. Welche Lage hat g, wenn g_{12} und g_{23} sich in O begegnen? Und welche, wenn g_{12} und g_{34} dies thun?

Aufgabe 106. Im R_6 ist eine Gerade g mittels ihrer fünf Projektionen g_{12}, g_{23}, $\cdots$ g_{56} gegeben. Bestimme ihre Spuren mit den sechs Projektionsräumen R_5.

Aufgabe 107. Untersuche, ob zwei im R_5 gegebene

Digitized by Google

Geraden sich schneiden, parallel oder windschief zu einander sind.

[Der Satz, dafs die gleichnamigen Projektionen zweier paralleler Geraden parallel sind, ist umkehrbar, wenn er auf irgend ein die Geraden *bestimmendes* System von Projektionen ausgedehnt wird; d. h. wenn $g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{45}$ eine Gerade g bestimmen und die Projektionen $g'_{12}, g'_{23}, g'_{34}, g'_{45}$ den gleichnamigen Projektionen von g parallel sind, so bestimmen die gestrichenen Projektionen gleichfalls eine Gerade g' und ist g' zu g parallel.]

57. **Zwei allgemeine Darstellungen der Ebene.** Wir entwickeln sogleich zwei allgemeine Darstellungsmethoden der Ebene und fügen nachher eine spezielle, auf R_4 beschränkte Methode hinzu.

Die erste allgemeine Methode bezieht sich auf die $n-2$ Projektionsräume

$$O(X_1 X_2 X_3),\ O(X_2 X_3 X_4), \ldots O(X_{n-2} X_{n-1} X_n).$$

Ist $O(X_{k-1} X_k X_{k+1})$ irgend einer dieser Projektionsräume, so wird von irgend einer gegebenen Ebene ε die Projektion $\varepsilon_{k-1,\,k,\,k+1}$ auf diesen Raum gefunden, indem man diesen Raum schneidet mit dem durch ε und die uneigentlichen Punkte der Achsen $OX_1, OX_2, \ldots OX_{k-2}, OX_{k+2}, \ldots OX_n$ bestimmten Raum R_{n-1}, welcher auf diesem Projektionsraume senkrecht steht. Und diese $n-2$ Projektionen $\varepsilon_{123}, \varepsilon_{234}, \ldots \varepsilon_{n-2,\,n-1,\,n}$ bestimmen umgekehrt die beliebig gegebene Ebene ε, da $n-2$ Räume R_{n-1} im R_n eine Ebene gemein haben.

Die in diesen Zeilen skizzierte Methode ist, wie es uns scheinen will, die einfachste, wenn man sich dreidimensionaler Modelle bedient. Es besteht dann die Abbildung einer willkürlichen Ebene ε aus $n-2$ Ebenen, welche ebenfalls willkürlich sind. Will man aber zu der Bildebene zurückkehren, so hat man jede der $n-2$ Ebenen $\varepsilon_{k-1,\,k,\,k+1}$ nochmals abzubilden, z. B. mittels zweier ihrer Spuren mit den drei Projektionsebenen $O(X_k X_{k+1})$, $O(X_{k-1} X_{k+1})$, $O(X_{k-1} X_k)$, welche im Projektionsraume liegen. Es ist hauptsächlich diese hier dann notwendige doppelte Abbildung, welche die Einfachheit der Methode beeinträchtigt.

Digitized by Google

Die zweite allgemeine Methode bezieht sich unmittelbar auf die $n-1$ Projektionsebenen; nach ihr wird die beliebig gegebene Ebene ε als Punkt- und Strahlenfeld aufgefafst und dieses Feld auf die $n-1$ Projektionsebenen projiziert. Sie wird vielleicht am besten verstanden, wenn wir vorher die Lösung einer bekannten Aufgabe der gewöhnlichen darstellenden Geometrie ins Gedächtnis zurückrufen. Diese Aufgabe verlangt die Bestimmung der zweiten Projektion S_2 eines Punktes S der durch drei gegebene Punkte P, Q, R bestimmten Ebene, wenn die erste Projektion S_1 dieses Punktes gegeben ist. Und die Konstruktion verläuft ganz einfach mit Hilfe des Schnittpunktes A der Geraden PQ und RS, ohne dafs es notwendig ist, die Spuren der Ebene PQR herbeizuschaffen. Diese Konstruktion führt bekanntlich auch zur Lösung der Aufgabe „Die zweite Projektion eines ebenen Vielecks zu vervollständigen, wenn die erste Projektion von allen und die zweite Projektion von drei der Eckpunkte gegeben ist". Sie führt auch zur Lösung der allgemeinen Aufgabe „In einem von zwei affin mit einander verwandten ebenen Feldern die Figur zu bestimmen, welche einer im andern Felde gegebenen Figur entspricht, wenn die Affinität beider Felder mittels zwei einander entsprechender Dreiseite festgelegt ist". Es beweisen diese Betrachtungen, dafs man sich in der gewöhnlichen darstellenden Geometrie statt der Spuren der Ebene auch der Projektionen der Ebene bedienen kann, wenn man nur die Ebene und ihre Projektionen nicht als ganze Gebilde, sondern als affine Punkt- und Strahlenfelder behandelt. Stellen wir uns in der mehrdimensionalen Geometrie auch auf diesen Standpunkt, so erhalten wir die in Rede stehende zweite allgemeine Methode. Nach ihr wird im R_8 (Fig. 27) eine Ebene mittels dreier Punkte $(P_{12}\,P_{34}\,P_{56}\,P_{78})$, $(Q_{12}\,Q_{34}\,Q_{56}\,Q_{78})$, $(R_{12}\,R_{34}\,R_{56}\,R_{78})$ bestimmt; von dieser Ebene wird dann leicht der vierte Punkt S mit gegebener Projektion S_{12} bestimmt. Wirklich sind, wie wir gesehen haben, alle Projektionen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \ldots \varepsilon_{n-1,n}$ von ε mit ε affin verwandt, obgleich ε mit jeder der Projektionsebenen im allgemeinen einen Raum R_5 bestimmt; also sind auch die Projektionen unter sich zu je zweien affin verwandt.

Nimmt man insbesondere S_{12} in O an, so findet man den Schnittpunkt der Ebene mit dem Raume $O(X_3\,X_4 \ldots X_n)$;

Digitized by Google

denn diese Spur entspricht den Bedingungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Und beschreibt S_{12} die Projektionsachse OX_2, so durchläuft der entsprechende Punkt S die Schnittlinie der Ebene ε mit dem Raume $O(X_2 X_3 \ldots X_n)$.

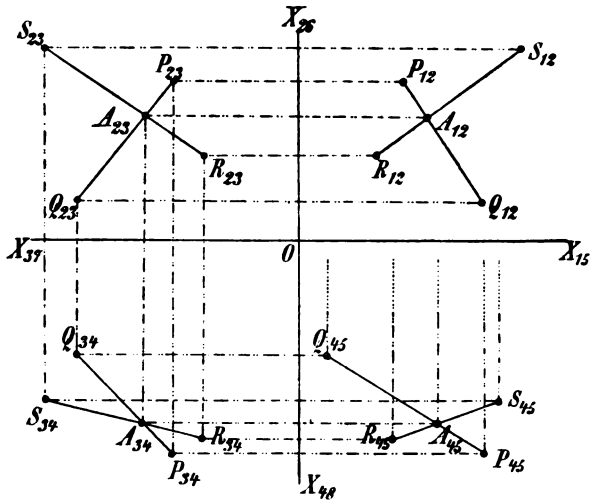


Fig. 27.

Aufgabe 108. Beweise, dafs die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Spuren von ε mit den Projektionsräumen R_{n-2} die Eckpunkte eines vollständigen n-Seits bilden.

58. **Anwendung der zweiten Methode auf ein Problem im R_4.** Zur Würdigung dieser zweiten allgemeinen Methode möge folgendes Problem der vierdimensionalen Geometrie hier eingeschaltet werden: „Im R_4 sind zwei Ebenen mittels zweier Punktetripel (ABC) und (DEF) gegeben; den Schnittpunkt dieser Ebenen zu konstruieren."

Die Lösung dieser Aufgabe kann folgenderweise vorbereitet werden. Sind ε und ε' die gegebenen Ebenen, ε_{12} und ε_{34} die Projektionen von ε und ebenso ε'_{12} und ε'_{34} die Projektionen von ε' auf die einander gegenüberliegenden Ebenen $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$, so sind einerseits ε_{12} und ε_{34},

Digitized by Google

andererseits ε'_{12} und ε'_{34} affin verwandt. Nimmt man nun zwischen ε_{12} und ε'_{12} die Verwandtschaft der Identität an, so entsteht zwischen ε_{34} und ε'_{34} eine affine Verwandtschaft. Oder kürzer: läfst man diejenigen Punkte P, P' von $\varepsilon, \varepsilon'$ einander entsprechen, für welche P_{12} und P'_{12} zusammenfallen, so erzeugt man zwischen den Punkten P_{34} und P'_{34} von ε_{34} und ε'_{34} eine affine Verwandtschaft. Offenbar ist die Projektion S_{34} des gesuchten Schnittpunktes S der Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ ein Koinzidenzpunkt dieser affinen Punktfelder; offenbar ist umgekehrt jeder eigentliche[53)] Punkt, welchen diese Punktfelder entsprechend gemein haben, die Projektion S_{34} eines den Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ gemeinsamen Punktes S. Da die Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ willkürlich gewählt worden sind, so haben sie nur einen Punkt S gemein und können die affinen Punktfelder deshalb auch nur einen eigentlichen Koinzidenzpunkt haben. Die Konstruktion des Schnittpunktes S von $\varepsilon, \varepsilon'$ fällt also mit der Bestimmung dieses Koinzidenzpunktes der affinen Felder ε_{34} und ε'_{34} zusammen. Wir geben die vollständige Lösung, setzen dabei aber zur Vereinfachung voraus, dafs mittels einer kleinen Vorarbeit in der Ebene $\varepsilon' = (DEF)$ die Punkte A', B', C' bestimmt seien, welche in der Projektion auf $O(X_1 X_2)$ mit A, B, C übereinstimmen. Man hat dann von zwei in einer nämlichen Ebene liegenden affinen Feldern $O(X_3 X_4)$ den Koinzidenzpunkt S aufzufinden, wenn irgend zwei einander entsprechende Dreiecke $A\,B\,C$ und $A'\,B'\,C'$ (Fig. 28) die Verwandtschaft bestimmen.

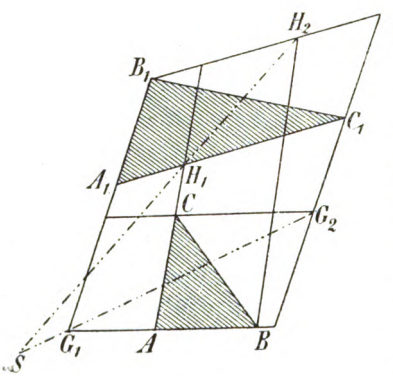


Fig. 28.

Einem Büschel paralleler Strahlen des Feldes ε_{34} entspricht im Felde ε'_{34} wieder ein Büschel paralleler Strahlen und der Ort des Schnittpunktes der einander entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel ist eine Gerade, weil die Büschel die uneigentliche Gerade ihrer Ebene, d. h. die Verbindungslinie ihrer Scheitel entsprechend gemein haben. Und diese Gerade, welche

Digitized by Google

auch leicht mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen gefunden wird, geht offenbar durch den Koinzidenzpunkt S, weil die durch S gelegten Strahlen der Büschel einander entsprechen. Nun ist für die Büschel, von welchen AB und $A'B'$ einander entsprechende Strahlen sind, der Schnittpunkt G_1 dieser Strahlen ein Punkt des Ortes und wird ein anderer Punkt G_2 dieses Ortes als Schnittpunkt der durch C zu AB parallelen Gerade mit der durch C' zu $A'B'$ parallelen Gerade gefunden. Und so wie $G_1 G_2$ der in Rede stehende Ort ist für zu AB und $A'B'$ parallele Strahlen, so ist auch $H_1 H_2$ der Ort des Schnittpunktes der einander entsprechenden Strahlen mit den Richtungen AC und $A'C'$. Also ist der Schnittpunkt S von $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$ der gesuchte Koinzidenzpunkt, d. h. die Projektion S_{34} des Schnittpunktes S der gegebenen Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$. Und nun findet man S_1 aus S_{34}, wie oben entwickelt worden ist, wonach S bestimmt ist.

Mittels dieser Methode erkennt man auch, ob die gegebenen Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ halb parallel zu einander sind; denn in diesem Falle sind die Geraden $G_1 G_2, H_1 H_2$ einander parallel. Und in dem besonderen Falle, wo diese Geraden zusammenfallen, haben $\varepsilon, \varepsilon'$ eine Gerade gemein und liegen sie deshalb in einem Raume.

Sind $\varepsilon, \varepsilon'$ parallel zu einander, so sind ABC und $A'B'C'$ in $O(X_3 X_4)$ Projektionen von equipollenten Dreiecken und also kongruent und ähnlich liegend. Es fallen dann $G_1 G_2$, $H_1 H_2$ in die uneigentliche Gerade von $O(X_3 X_4)$ zusammen. Weil die Gerade der Koinzidenz von $G_1 G_2, H_1 H_2$ offenbar schon ins Unendliche verschwindet, sobald ABC und $A'B'C'$ (Fig. 29) ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke sind, so mufs jetzt untersucht werden, welches Lageverhältnis $\varepsilon, \varepsilon'$ dann zu einander haben. Offenbar haben die affinen Felder dann aufser der uneigentlichen Gerade den Schnittpunkt S von AA', BB', CC' entsprechend gemein, und ist dieser Punkt die Projektion S_{34} des einzigen eigentlichen Punktes, welcher

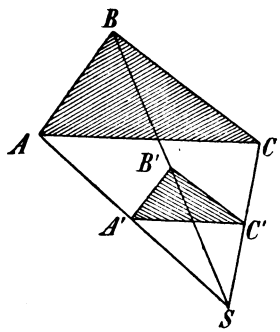


Fig. 29.

Digitized by Google

$\varepsilon, \varepsilon'$ gemeinsam ist, woraus folgt, dafs $\varepsilon, \varepsilon'$ weder in einem Raume liegen noch Verwandtschaft von Parallelismus zeigen. Und betrachtet man nun die uneigentlichen Geraden u_1 und u_1' (Fig. 30) von ε und ε' in Verbindung mit den Kanten (12), (34) des uneigentlichen Tetraeders[55,1] des Koordinatensystems, so findet man auch unmittelbar, dafs es genügt vorauszusetzen, diese vier Geraden u_1, u_1', (12), (34) gehören einer nämlichen Regelfläche zweiten Grades an, um die erwähnten affinen Felder in $O(X_3\, X_4)$ zu erhalten. Ist irgend ein eigentlicher Punkt P durch seine Projektionen P_{12}, P_{34} bestimmt, so erscheint er als Schnittpunkt der in P_{12} zu $O(X_1\, X_2)$ normalen Ebene mit der in P_{34} zu $O(X_3\, X_4)$ normalen Ebene. Anwendung dieses allgemeinen Gesetzes auf die Punkte Q_∞ der uneigentlichen Gerade u_1 von ε zeigt, dafs die einander entsprechenden Projektionen Q_{12}, Q_{34} von den Geraden

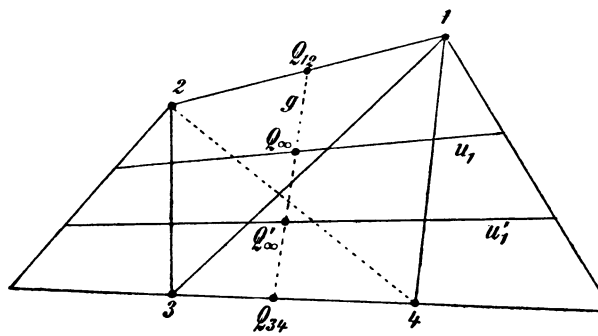


Fig. 30.

g der durch die Leitstrahlen (12), (34), u_1 bestimmten Regelschar eingeschnitten werden. Ist die uneigentliche Gerade u_1' von ε' Leitstrahl dieser nämlichen Regelschar, so haben zwei Punkte Q_∞, Q'_∞ von u_1, u'_1, welche in ihrer Projektion Q_{12} übereinstimmen, auch die nämliche Projektion Q_{34} und tritt also die oben erwähnte besondere Eigenschaft der affinen Felder in $O(X_3\, X_4)$ ein.

An die Thatsache, dafs oben nur Projektionen P_{12} und P_{34} verwendet worden sind, knüpfen wir die Bemerkung an, dafs man bei der zweiten allgemeinen Methode, von welcher wir uns jetzt verabschieden, immer nur diejenigen

Digitized by Google

Projektionen zu benutzen hat, welche einen Punkt bestimmen. Allein wir fügen noch hinzu, — was wir oben (53,) zu untersuchen absichtlich versäumten —, dafs die Bestimmung eines uneigentlichen Punktes Q_∞ im R_4 nicht mit Hilfe von Q_{12}, Q_{34} allein geschehen kann, sondern dafs dazu noch eine andere Projektion z. B. Q_{23} erforderlich ist, und dafs im allgemeinen im R_n uneigentliche Punkte zu ihrer Bestimmung mehr Projektionen erfordern als eigentliche Punkte.

Wir erwähnen schliefslich noch, dafs uns nachher eine einfachere Konstruktion des Schnittpunktes zweier Ebenen entgegentreten wird (sieh Aufgabe 129).

59. **Dritte Darstellung der Ebene im R_4.** Wir wenden uns nun zu einer auf R_4 beschränkten Methode, welche einfach darin besteht, dafs man die Ebene mittels ihrer Spuren mit den drei Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_2 X_3)$, $O(X_3 X_4)$ bestimmt. Aus diesen Spuren mufs dann die Spur mit $O(X_4 X_1)$ abgeleitet werden können. Da es bisweilen notwendig ist, sich der Projektionen dieser Spuren zu bedienen, so empfiehlt es sich, die verschiedenen Spuren mit verschiedenen Buchstaben anzudeuten. Ein für allemal wählen wir dafür (Fig. 31) die Buchstaben E, F, G, H; treten in einer nämlichen Zeichnung zwei verschiedene Ebenen auf, so können die gleichnamigen Spuren dann mittels Striche von einander unterschieden werden.

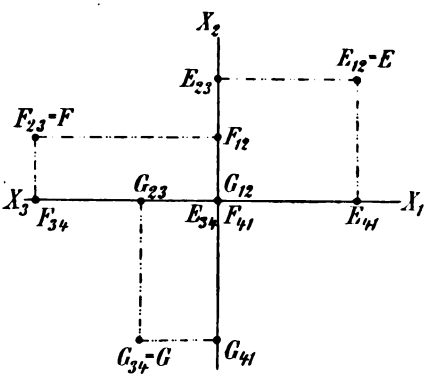


Fig. 31.

Wir stehen nun sofort vor der Aufgabe, wenn E, F, G gegeben sind, H zu konstruieren. Weil die Darstellung der Räume im R_4 zu einer äufserst einfachen Lösung(62,3) dieser Aufgabe führt, so schieben wir ihre Behandlung vorläufig auf, weisen also hier nur darauf hin, dafs in der oben ge-

Digitized by Google

gebenen zweiten allgemeinen Methode eine Lösung enthalten ist. Es wird doch nur verlangt, die Projektion H_{41} des Punktes H der Ebene EFG zu finden, wenn gegeben ist, dafs H_{23} mit O zusammenfällt. Mit dieser Bemerkung ist auch auf den innigen Zusammenhang dieser speziellen Methode der Spuren mit der zweiten allgemeinen Methode hingezielt.

Natürlich kann man, anstatt von Spurpunkten mit den Projektionsebenen Gebrauch zu machen, auch die Spurgeraden einer Ebene mit den Projektionsräumen benutzen; im allgemeinen genügt es dazu, die Geraden EF und FG zu verwenden. Natürlich kann man auch noch im R_5 die Methode der Spuren anwenden, indem man eine Ebene mittels ihrer Spurpunkte mit den Räumen $O(X_1 X_2 X_3)$, $O(X_2 X_3 X_4)$, $O(X_3 X_4 X_5)$ bestimmt.

Aufgabe 109. Welche merkwürdige Lage — vergleiche die vorhergehende Aufgabe — haben die sechs Spurpunkte einer Ebene im R_4 zu einander?

Aufgabe 110. Weshalb ist es nicht möglich, die Ebene im R_4 mittels ihrer Spuren mit den Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_1 X_3)$, $O(X_2 X_3)$ zu bestimmen?

Aufgabe 111. Im R_5 ist eine Ebene mittels ihrer Spurpunkte mit den Räumen $O(X_1 X_2 X_3)$, $O(X_2 X_3 X_4)$, $O(X_3 X_4 X_5)$ gegeben; bestimme die Spurpunkte dieser Ebene mit den Räumen $O(X_4 X_5 X_1)$, $O(X_5 X_1 X_2)$.

60. **Verschiedene Lagen der Ebene im R_4.** In aller Kürze zählen wir jetzt die verschiedenen Lagen der Ebene auf, indem wir wieder die uneigentliche Gerade u_1 der Ebene ε in Verbindung mit dem durch das Koordinatensystem bestimmten uneigentlichen Tetraeder betrachten. Allein, um nicht zu weitläufig zu werden, behandeln wir nur einige Fälle.

a) Die Lage von ε ist willkürlich.

b) Die Ebene ε (Fig. 32) ist halb parallel zu $O(X_1 X_2)$ und deshalb halb normal zu $O(X_3 X_4)$; d. h. es begegnet u_1 der Kante (1 2) des Tetraeders.

Digitized by Google

c) Die Ebene ε (Fig. 33) ist halb parallel und halb normal zu $O(X_1\, X_2)$ und deshalb auch halb normal und halb parallel zu $O(X_3\, X_4)$; d. h. u_1 ist gemeinschaftliche Transversale der Kanten (1 2), (3 4).

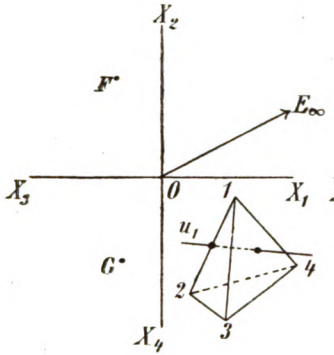


Fig. 32.

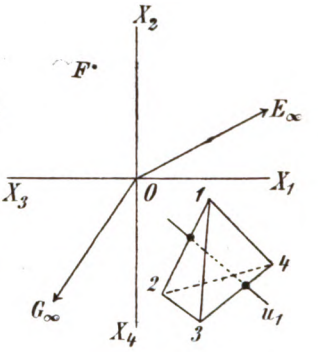


Fig. 33.

d) Die Ebene ε (Fig. 34) ist parallel zu $O(X_1\, X_2\, X_3)$ und deshalb normal zu OX_4; d. h. u_1 liegt in der Seitenfläche (1 2 3).

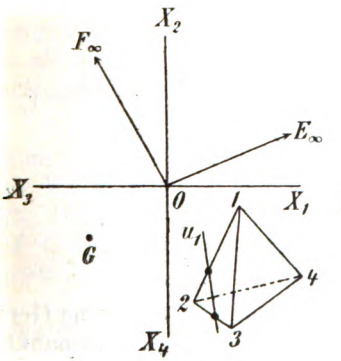


Fig. 34.

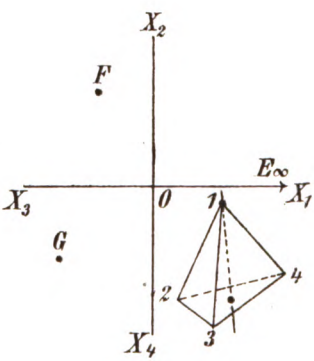


Fig. 35.

e) Die Ebene ε (Fig. 35) ist parallel zu OX_1 und deshalb normal zu $O(X_2\, X_3\, X_4)$; d. h. u_1 geht durch den Eckpunkt (1).

Digitized by Google

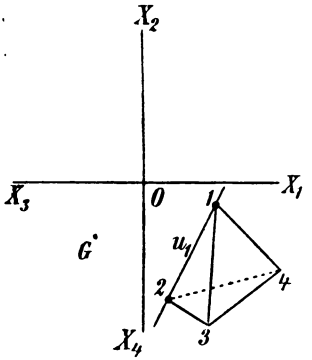


Fig. 36.

f) Die Ebene ε (Fig. 36) ist parallel zu $O(X_1 X_2)$ und deshalb normal zu $O(X_3 X_4)$; d. h. u_1 fällt mit der Kante (1 2) zusammen.

Aufgabe 112. Zeichne nach einander die Fälle wo u_1

1º der Kante (1 3) begegnet,

2º gemeinschaftliche Transversale ist der Kanten (1 3), (2 4),

3º mit der Kante (1 3) zusammenfällt.

Weiter kommen noch mehrere besondere Fälle anderer Art in Betracht. Von diesen erwähnen wir die folgenden:

a') Die Ebene ε (Fig. 37) geht durch O; sie kann dann mittels ihrer Spurgeraden g und g' mit den Räumen $O(X_1 X_2 X_3)$ und $O(X_2 X_3 X_4)$ bestimmt werden.

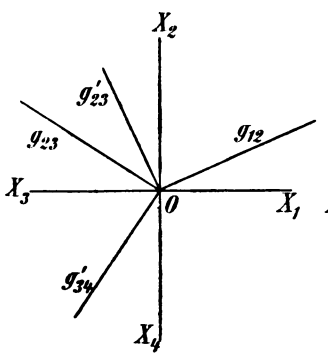


Fig. 37.

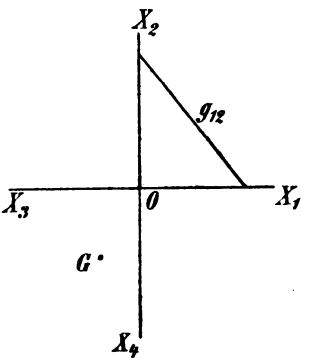


Fig. 38.

b') Die Ebene ε (Fig. 38) hat mit $O(X_1 X_2)$ eine Gerade g gemein; sie wird dann durch g und den Spurpunkt G bestimmt.

c') Die Ebene ε hat mit jeder der beiden Ebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_3 X_4)$ eine Gerade gemein und geht also auch durch O.

d') Die Ebene ε liegt im Raume $O(X_1 X_2 X_3)$, u. s. w.

Digitized by Google

Aufgabe 113. Wie stellt man eine Ebene dar, welche jede der Projektionsebenen $O(X_1 X_3)$, $O(X_2 X_4)$ in einer Gerade schneidet?

[Man kann entweder jede dieser beiden durch O gehenden Geraden mittels eines ihrer Punkte bestimmen, oder die Projektionsebenen $O(X_1 X_3)$, $O(X_2 X_4)$ umklappen.]

Aufgabe 114. Untersuche, welche Vereinfachung die Bestimmung eines Punktes und einer Gerade in ε in den besprochenen besonderen Fällen erfährt.

Aufgabe 115. Wie untersucht man mit Hilfe der Spuren ob zwei Ebenen einander parallel sind?

[Man untersucht, ob die Spurpunkte zu parallelen Spurgeraden führen.]

Später wird gezeigt werden, wie man durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene legt, u. s. w.

61. **Die Darstellung des Raumes.** Im R_n kann der dreidimensionale Raum mittels seiner Projektionen auf die $n-3$ Räume $(OX_1X_2X_3)$, $O(X_2X_3X_4)$, $\ldots O(X_{n-2}X_{n-1}X_n)$ bestimmt werden.

Ist es denn nicht möglich zu der Darstellung des Raumes im R_n die Projektionsebenen zu verwenden? Dies ist allerdings der Fall, was uns, wie wir sogleich sehen werden, zu einer neuen Abbildungsmethode führen wird.

Vier von einander unabhängige Punkte bestimmen einen Raum. Also ist ein Raum dargestellt, sobald man auf irgend eine Weise vier von einander unabhängige Punkte dargestellt hat. Dazu kann man z. B. die Koordinaten von vier Punkten auf die Achsen auftragen, wodurch man die Projektionen dieser Punkte auf die Achsen erhält. Oder man kann z. B. im R_{2n} die n Projektionen P_{12}, $P_{34}, \ldots P_{2n-1,\,2n}$ von vier Punkten P benutzen. Wir beweisen die Lebensfähigkeit dieser neuen Methode, indem wir die Konstruktion irgend eines fünften Punktes eines in R_4 durch vier Punkte gegebenen Raumes skizzieren.

Ist die Lage von vier den Raum bestimmenden Punkten A, B, C, D (Fig. 39) in Bezug auf das Koordinatensystem

Digitized by Google

$O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ gegeben und sind die Achsenprojektionen E_1, E_2, E_3 irgend eines fünften Punktes E dieses Raumes beliebig gewählt, so gilt es die Projektion E_4 dieses Punktes ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke bestimme man auf den Geraden AB, AC, AD die Punkte B', C', D', welche sich in E_1 auf OX_1 projizieren, d. h. die Schnittpunkte von AB, AC, AD mit dem Raume durch E_1 parallel zu $O(X_2 X_3 X_4)$,

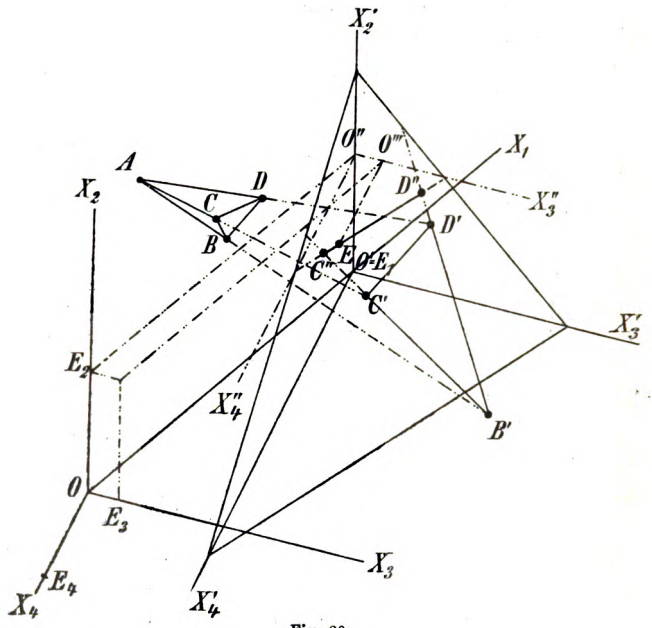


Fig. 39.

welcher durch die durch E_1 zu OX_2, OX_3, OX_4 parallelen Geraden $O'X'_2$, $O'X'_3$, $O'X'_4$ bestimmt ist; mit Hilfe der Proportionen

$$\frac{A_1 P_1}{A_1 E_1} = \frac{A_1 P_1}{A_1 P'_1} = \frac{A_2 P_2}{A_2 P'_2} = \frac{A_3 P_3}{A_3 P'_3} = \frac{A_4 P_4}{A_4 P'_4},$$

wo P der Reihe nach als B, C, D zu deuten ist, kann diese Konstruktion ausgeführt werden. Nachher bestimme man in derselben Weise auf $B'C'$ und $B'D'$ die Punkte C'' und D'',

Digitized by Google

welche sich auf OX_2 in E_2 projizieren, d. h. die Schnittpunkte von $B'C'$ und $B'D'$ mit der Ebene, welche erhalten wird, wenn man auf $O'X_2'$ die Strecke $O'O'' = OE_2$ aufträgt, durch O'' die zu OX_3 und OX_4 parallelen Geraden $O''X_3''$ und $O''X_4''$ legt und diese durch eine Ebene verbindet. Und dann hat man endlich auf $C''D''$ nur noch den Punkt E zu bestimmen, welcher sich in E_3 auf OX_3 projiziert und für welchen also die Projektion auf OX_3'' durch die Bedingung $O''O''' = OE_3$ bestimmt wird. Die gesuchte Projektion E_4 wird dann unmittelbar gezeichnet; denn es ist $OE_4 = O'''E$.

Aufgabe 116. Verwirkliche die oben gegebene Konstruktion in der Bildebene.

Aus obenstehenden Entwickelungen kann der Schlufs gezogen werden, dafs man sich mit Hilfe der Achsenprojektionen immer aushelfen kann, wie grofs auch die Dimensionenzahlen von Operationsraum und zu projizierendem Raume seien; nur wollen wir nicht verhehlen, dafs die Mühseligkeiten der wirklichen Ausführung mit diesen Zahlen ungeheuer wachsen.

In den Räumen R_4, R_5, R_6 kann man sich bei der Darstellung des Raumes der Spuren bedienen. Denn es bestimmt der Raum im R_4 Spurpunkte mit den Achsen und Spurgeraden mit den Projektionsebenen, im R_5 Spurpunkte mit den Projektionsebenen und im R_6 Spurpunkte mit den Projektionsräumen. Allein wir beschäftigen uns hier weiter ausschliefslich mit der Darstellung des Raumes im R_4.

62. **Verschiedene Raumprobleme im R_4.** Die vier Spurpunkte eines Raumes mit den Achsen (Fig. 40), welche wir immer mit den Buchstaben K, L, M, N belegen, bestimmen unmittelbar die drei Spurgeraden KL, LM, MN und die zwei Spurebenen KLM, LMN.

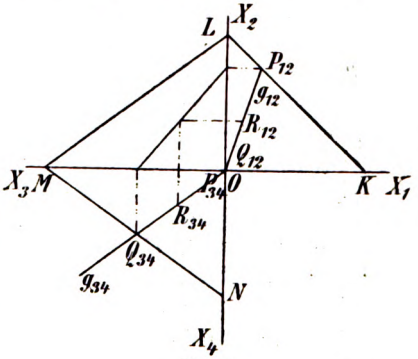


Fig. 40.

Digitized by Google

Will man (Fig. 41) die Spuren des durch vier beliebig gewählte Punkte P, Q, R, S bestimmten Raumes konstruieren, so konstruiere man[67b] die Spuren E, F, G und E', F', G' der Ebenen (PQR) und (QRS). Die Geraden EE', FF', GG' sind dann die Spurgeraden KL, LM, MN des gesuchten Raumes; diese Konstruktion ist in der Figur auf die Spurgerade KL beschränkt.

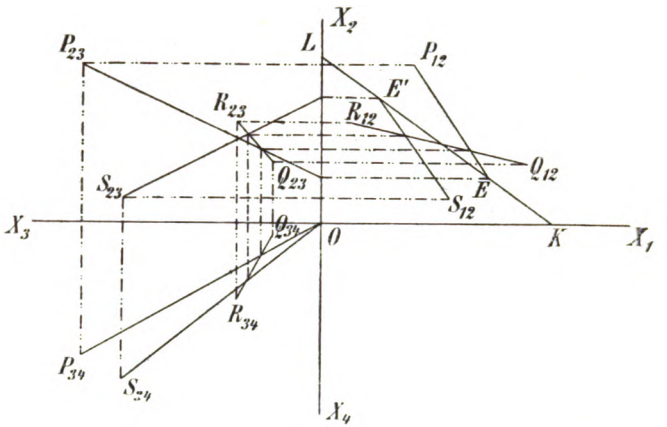


Fig. 41.

Aufgabe 117. Lege einen Raum durch

1º eine Ebene und einen Punkt aufserhalb dieser Ebene,

2º zwei zu einander windschiefe Geraden

und zähle alle anderen überhaupt möglichen Fälle von Raumbestimmung auf, wenn auch Bedingungen von Parallelismus gestellt werden dürfen.

Nimmt man in den Spurgeraden KL, LM, MN die Punkte E, F, G beliebig an, so erhält man die Spurpunkte einer im gegebenen Raume liegenden Ebene. Eine in dieser Ebene beliebig angenommene Gerade ist dann wieder eine beliebige Gerade des Raumes und das entsprechende gilt für einen beliebigen Punkt dieser Gerade. Allein, wenn es sich nur um die Konstruktion eines willkürlichen Punktes handelt, so kommt man schneller zum Ziele, wenn man (Fig. 40) sich einer die Spurgeraden KL und MN schneidenden Gerade g bedient.

Digitized by Google

Die Abzählung der verschiedenen Lagen des Raumes wird wieder durch die Betrachtung seiner uneigentlichen Ebene U_2 erleichtert. Es kann diese Ebene in Bezug auf das uneigentliche Tetraeder des Koordinatensystems entweder beliebig liegen, oder einen Eckpunkt, oder eine Kante dieses Tetraeders enthalten, oder mit einer der Seitenflächen zusammenfallen, u. s. w.

Aufgabe 118. Bringe die erwähnten Fälle in Zeichnung.

Aufgabe 119. Bestimme die Spurgerade des durch $O(X_1 X_2)$ und einen willkürlichen Punkt P gehenden Raumes mit $O(X_3 X_4)$.

[Diese Spurgerade ist OP_{34}.]

Aufgabe 120. Bestimme die Spurgeraden des durch OX_1 und die willkürlichen Punkte P, Q gelegten Raumes mit $O(X_2 X_3)$ und $O(X_3 X_4)$.

[Man suche die Schnittpunkte der Projektion von PQ auf den Raum $O(X_2 X_3 X_4)$ mit $O(X_2 X_3)$, $O(X_3 X_4)$ und verbinde diese Punkte mit O.]

Aufgabe 121. Bestimme die Spurgeraden des Raumes durch O und die durch drei beliebig angenommene Punkte P, Q, R bestimmte Ebene.

Die Bestimmung der Schnittebene zweier gegebener Räume $KLMN$ und $K'L'M'N'$ (Fig. 42) erfolgt aus der Bemerkung, dafs die Spurpunkte E, F, G dieser Ebene die Schnittpunkte der entsprechenden Spurgeraden der Räume sind.

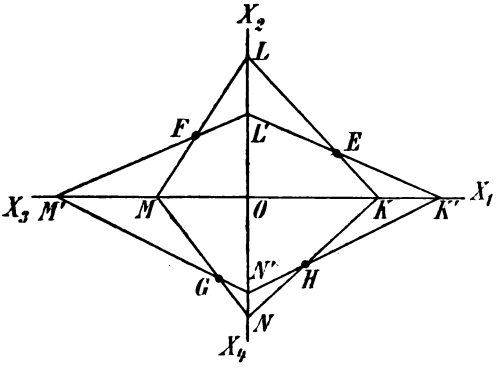


Fig. 42.

Digitized by Google

Es begegnet uns hier die einfachste Lösung der oben (59₂) gestellten Aufgabe, die vierte Spur H der durch ihre Spuren E, F, G bestimmten Ebene zu konstruieren. Dazu bringt man durch die gegebene Ebene irgend zwei Räume, indem man die Spurgeraden der Räume durch die entsprechenden Spuren E, F, G dieser Ebene legt. Es ist dann offenbar der Schnittpunkt H der Spurgeraden NK und $N'K'$ in $O(X_4 X_1)$ der gesuchte Punkt.

Aufgabe 122. Beweise, dafs sich NK um einen festen Punkt dreht, wenn das Viereck $KLMN$ sich so bewegt, dafs K, L, M, N auf den Achsen liegen bleiben und KL, LM, MN fortwährend durch E, F, G gehen.

[Man vergleiche die von K, L, M, N durchlaufenen Punktreihen und achte auf den Koinzidenzpunkt O, u. s. w.]

Aufgabe 123. Durch eine gegebene Gerade g eine Ebene zu legen, welche halb parallel ist zu jeder von zwei gegebenen Ebenen ε, ε'.

[Man lege durch g den Raum R_3 parallel zu ε und den Raum R'_3 parallel zu ε' und suche dann die Schnittebene dieser Räume.]

Aufgabe 124. Durch einen gegebenen Punkt P eine Ebene zu legen, welche mit jeder von zwei gegebenen Ebenen eine Gerade gemein hat.

Die Bestimmung der Schnittgerade von drei und des Schnittpunktes von vier gegebenen Räumen bietet keine Schwierigkeiten. Die Schnittgerade der drei Räume R, R', R'' verbindet den Schnittpunkt der in $O(X_1 X_2 X_3)$ liegenden Ebenen $KLM, K'L'M', K''L''M''$ mit dem Schnittpunkte der in $O(X_2 X_3 X_4)$ liegenden Ebenen $LMN, L'M'N', L''M''N''$. Und liegen vier Räume R, R', R'', R''' gegeben vor, so kann man die Schnittgeraden g, g' der Tripel R, R', R'' und R', R'', R''' bestimmen und den Schnittpunkt dieser in der Schnittebene von R' und R'' liegenden Geraden suchen.

Aufgabe 125. Man bestimme die Schnittgerade
1º eines Raumes und einer Ebene,
2º zweier Ebenen eines nämlichen Raumes.

Aufgabe 126. Die gemeinschaftliche Transversale dreier willkürlich gegebener Geraden g, g', g'' zu bestimmen.

Digitized by Google

[Man bestimme die Schnittlinie der drei Räume $(g'g'')$, $(g''g)$, (gg').]

Aufgabe 127. Vier willkürliche Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 sind gegeben; die vier Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 zu bestimmen, welche mit den gegebenen Geraden einen Doppelvier von Geraden bilden.

[Es bilden die acht Geraden einen Doppelvier

$$\left|\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix}\right|$$

von Geraden, wenn jede Gerade a die drei Geraden b mit ungleichem Index und also auch jede Gerade b die drei Geraden a mit ungleichem Index schneidet.]

Aufgabe 128. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, welche drei gegebene Ebenen schneidet.

Aufgabe 129. Man bestimme den Schnittpunkt

1º eines Raumes und einer Gerade,

2º zweier Ebenen

3º einer Ebene und einer Gerade eines nämlichen Raumes.

[Der zweite Teil dieser Aufgabe ist oben schon gelöst worden (vergleiche Nr. 58); die hier verlangte Lösung besteht darin, dafs man durch jede der gegebenen Ebenen zwei Räume legt und nun den Schnittpunkt dieser vier Räume bestimmt.]

Aufgabe 130. Wie findet man die Ebene, welche mit jeder von drei gegebenen Ebenen ε, ε', ε'' eine Gerade gemein hat?

[Die gesuchte Ebene verbindet die drei Schnittpunkte der drei aus ε, ε', ε'' zu bildenden Ebenenpaaren.]

Aufgabe 131. Vier willkürliche Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 sind gegeben; die vier Ebenen β_1, β_2, β_3, β_4 zu bestimmen, welche mit den gegebenen Ebenen einen Doppelvier von Ebenen bilden.

[Es bilden diese acht Ebenen einen Doppelvier von Ebenen, wenn jede Ebene α die drei Ebenen β mit ungleichem Index und deshalb auch jede Ebene β die drei Ebenen α mit ungleichem Index in Geraden schneidet.]

Digitized by Google

Aufgabe 132. Wie untersucht man, ob zwei gegebene Ebenen entweder einen Punkt oder eine Gerade gemein haben, ob sie entweder nicht parallel, oder halb parallel oder parallel sind?

[Die Ebenen ε, ε' haben eine Gerade gemein, wenn sie in einem nämlichen Raume liegen, d. h. wenn EE', FF'' sich auf OX_2 und FF', GG' sich auf OX_3 schneiden. Bei der Untersuchung auf Parallelismus lege man durch ε, ε' zwei Räume R, R', welche $O(X_1 X_2 X_3)$ in parallelen Ebenen schneiden, u. s. w.]

Will man durch den gegebenen Punkt P (Fig. 43) einen Raum R'_3 parallel zu dem gegebenen Raume $R_3 = KLMN$ hindurchlegen, so bringe man durch P zuerst eine zu der Spurgerade KL von R_3 parallele Gerade g. Der Schnittpunkt Q von g mit dem Raume $O(X_2 X_3 X_4)$ ist dann ein Punkt der Spurebene $L'M'N'$ von R'_3. Schneidet die durch Q zu LM parallele Gerade die Ebene $O(X_3 X_4)$ in R, so gehört dieser Punkt der Spurgerade $M'N'$ an, u. s. w. Und soll durch P eine Ebene ε' parallel zu irgend einer gegebenen Ebene $\varepsilon = E\,F\,G$ gelegt werden, so hat man obige Konstruktion für irgend zwei durch ε gehende Räume zu wiederholen.

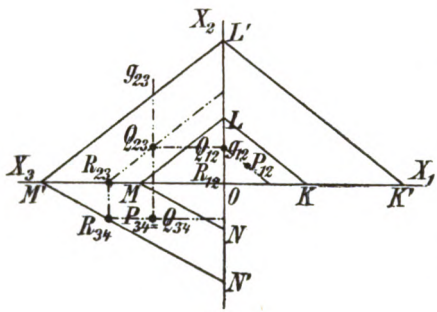


Fig. 43.

Andere einfache Konstruktionen, welche sich auf Parallelismus beziehen, werden uns weiter unten begegnen.

Die Frage, ob man sich im Raume R_n auch noch der Spuren bedienen kann, mufs offenbar bejaht werden. Denn im R_n können die Räume R_{n-1} entweder durch ihre Spurpunkte mit den Achsen oder durch ihre Spurgeraden mit den Projektionsebenen, die Räume R_{n-2} durch ihre Spuren mit diesen Ebenen bestimmt werden. Wir werden bald genötigt sein, von dieser Bestimmungsweise Gebrauch zu machen.

Digitized by Google

63. **Orthogonalität und Abstand.** Im R_n gilt der Satz:

Ist eine Gerade g zu einem Raume R_{n-1} senkrecht, so sind die $n-1$ Projektionen $g_{12}, g_{23}, g_{34}, \ldots$ der Gerade senkrecht zu den gleichnamigen Spurgeraden $KL, LM, MN, \ldots$ vom R_{n-1}.

Folgendermassen wird gezeigt, dafs g_{12} und KL zu einander normal sind. Weil gegeben ist, dafs g und R_{n-1} auf einander senkrecht stehen, so kreuzt die Spur KL von R_{n-1} die Gerade g senkrecht. Weil KL in der Ebene $O(X_1 X_2)$ liegt, so kreuzt sie ebenso die Achsen $OX_3, OX_4, \ldots OX_n$ senkrecht. Also ist KL senkrecht zu den Geraden $g, OX_3, OX_4, \ldots OX_n$; d. h. im uneigentlichen Raume $\overline{U}_n$ von R_n ist der uneigentliche Punkt von KL den uneigentlichen Punkten der $n-1$ Geraden $g, OX_3, OX_4, \ldots OX_n$ senkrecht zugeordnet. Allein diese $n-1$ Punkte bilden ein uneigentliches Simplex $S_u(n-1)$. Deshalb ist KL senkrecht zu jeder Gerade des durch dieses $S_u(n-1)$ und irgend einen eigentlichen Punkt von g bestimmten Raumes mit $n-1$ Dimensionen, welcher g auf $O(X_1 X_2)$ projiziert, und also auch zu der Projektion g_{12}.

Natürlich sind, wenn g zu R_{n-1} normal ist, *alle* Projektionen von g zu den gleichnamigen Spurgeraden von R_{n-1} senkrecht. Wir erwähnten nur die *gebräuchlichen* Projektionen $g_{12}, g_{23}, \ldots g_{n-1,n}$, weil man umgekehrt schliefsen kann, dafs g und R_{n-1} auf einander senkrecht stehen, sobald man weifs, dafs diese $n-1$ gebräuchlichen Projektionen g bestimmen und auf den gleichnamigen Spurgeraden von R_{n-1} senkrecht stehen. Denn in diesem Falle ist g senkrecht zu den $n-1$ den R_{n-1} bestimmenden Spurgeraden und deshalb auch zu R_{n-1}.

Will man im R_n aus einem gegebenen Punkte P auf einen gegebenen Raum R_{n-1} ein Lot fällen, so hat man, wenn dieser Raum durch $n-1$ willkürliche Punkte bestimmt ist, also nach der oben entwickelten zweiten allgemeinen Darstellungsmethode, zunächst die Spurpunkte $K, L, M, N, \ldots$ dieses Raumes zu bestimmen und aus diesen die Spurgeraden $KL, LM, MN, \ldots$ abzuleiten; d. h. man hat zunächst zu der Darstellung des Raumes R_{n-1} mittels Spurgeraden überzugehen. Auf diesen Umstand machten wir am

Digitized by Google

Ende der vorhergehenden Nummer eine Anspielung. Um uns nicht in der Allgemeinheit zu verlieren, beschränken wir uns weiterhin auf den Raum R_4.

64. **Abstandsbestimmungen im R_4.** Wir beschäftigen uns sofort mit dem Probleme, den Abstand eines gegebenen Punktes P von einem gegebenen Raume R_3 zu bestimmen und führen die entsprechende Konstruktion ganz durch. Sie besteht aus drei Teilen; denn man hat zuerst aus P das Lot g auf R_3 zu fällen, nachher den Fufspunkt Q dieses Lotes zu suchen und endlich die wahre Länge des Abstandes PQ zu bestimmen.

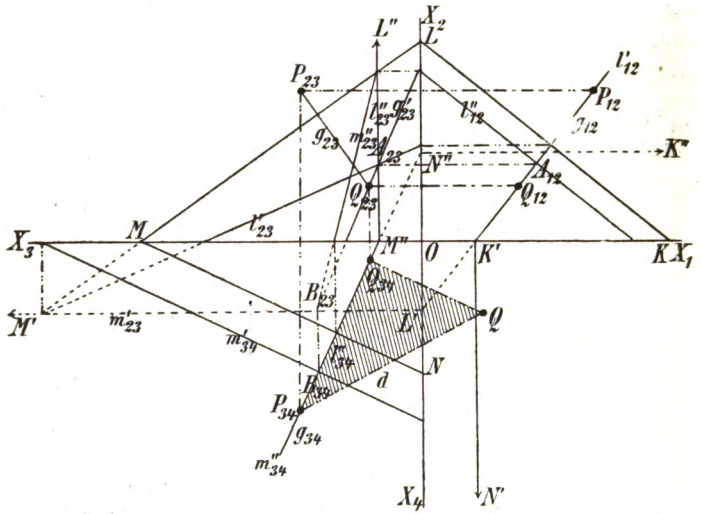


Fig. 44.

Wir fällen (Fig. 44) aus den Projektionen P_{12}, P_{23}, P_{34} von P die Lote g_{12}, g_{23}, g_{34} auf die Spurgeraden KL, LM, MN des gegebenen Raumes und legen nun zur Bestimmung des Schnittpunktes Q von g mit R_3 durch diese durch g_{12}, g_{23}, g_{34} bestimmte Gerade g zwei neue Räume R'_3 und R''_3, von welchen der erstere in g_{12} senkrecht auf $O(X_1 X_2)$, der zweite in g_{34} senkrecht auf $O(X_3 X_4)$ steht; also sind M', N' von R'_3 und K'', L'' von R''_3 uneigentliche Spurpunkte. Wir suchen weiter die Schnittgerade g' von den

Digitized by Google

Räumen R_3, R'_3, R''_3, welche sich der besonderen Stellungen von R'_3, R''_3 wegen auf $O(X_1 X_2)$ als g_{12} und auf $O(X_3 X_4)$ als g_{34} projizieren mufs, in der Projektion auf $O(X_2 X_3)$ aber von g_{23} verschieden sein wird. Zu diesem Zwecke bestimmen wir in $O(X_1 X_2 X_3)$ den Schnittpunkt A der Ebenen $KLM, K'L'M', K''L''M''$ und in $O(X_2 X_3 X_4)$ den Schnittpunkt B der Ebenen $LMN, L'M'N', L''M''N''$, durch welche Konstruktion $g' = AB$ erhalten wird. Diese Konstruktion wird wohl aus der Figur abzulesen sein, wenn wir noch bemerken, dafs die Schnittlinien von KLM mit $K'L'M'$ und $K''L''M''$ als l' und l'', die Schnittlinien von LMN mit $L'M'N'$ und $L''M''N''$ als m' und m'' bezeichnet worden sind. Der Schnittpunkt von g_{23} mit $g'_{23} = A_{23} B_{23}$ ist dann Q_{23} und aus Q_{23} werden Q_{12} und Q_{34} in bekannter Weise abgeleitet. Und nun ergiebt, wie im folgenden Paragraphen[69a] näher betont werden soll, die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $P_{12} Q_{12}$ und $P_{34} Q_{34}$ in der Hypotenuse dieses Dreiecks die wahre Länge d des Abstandes PQ.

Hat der Raum R_3 in Bezug auf das System der Projektionsräume eine besondere Stellung, so vereinfacht sich obige Konstruktion. So wird in Fig. 45 der Fall betrachtet,

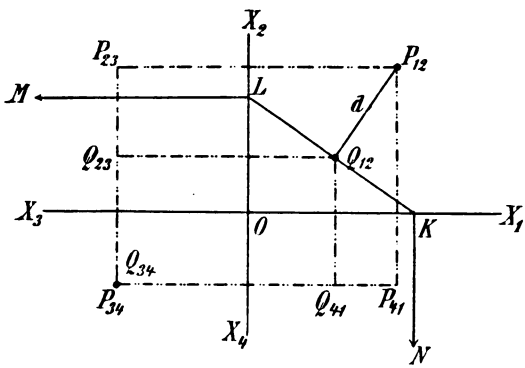


Fig. 45.

wo R_3 senkrecht steht auf der Ebene $O(X_1 X_2)$; dann ist das Lot $P_{12} Q_{12}$ aus P_{12} auf KL unmittelbar die wahre Länge des Abstandes. Nachher[66,10] werden wir zeigen, wie der allgemeine Fall auf diesen besonderen Fall reduziert wird.

Digitized by Google

Aufgabe 133. Wie vereinfacht sich die Konstruktion des Abstandes von P zum Raume R_3, wenn R_3 der Achse OX_1 parallel läuft?

[Es spielt sich dann die Konstruktion im $O(X_2 X_3 X_4)$ ab.]

Aufgabe 134. Durch den gegebenen Punkt P eine Gerade zu legen, welche

1º eine gegebene Gerade und eine gegebene Ebene senkrecht kreuzt,

2º drei gegebene Geraden senkrecht kreuzt,

3º zwei zu einander halb parallele Ebenen senkrecht schneidet.

Aufgabe 135. Bestimme den Abstand eines gegebenen Punktes P von einer gegebenen Ebene ε.

[Man fälle aus P auf ε die senkrechte Ebene ε', suche den ε und ε' gemeinschaftlichen Punkt Q und bestimme die wahre Länge von PQ. Die Ebene ε' wird gefunden, indem man irgend zwei Räume R_3 durch ε legt und die aus P auf diese Räume gefällten Lote durch eine Ebene verbindet.]

Aufgabe 136. Bestimme den Abstand eines gegebenen Punktes P von einer gegebenen Gerade g.

[Man fälle aus P auf g den senkrechten Raum R_3, suche den Schnittpunkt Q von R_3 mit g, u. s. w. Der Raum R_3 wird sofort erhalten mittels des allgemeinen Satzes der Nr. 63 in Verbindung mit der in Fig. 43 gegebenen Konstruktion.]

Aufgabe 137. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche

1º zwei gegebene Geraden senkrecht kreuzt,

2º zwei gegebene Räume senkrecht schneidet.

Aufgabe 138. Bestimme den Abstand der folgenden zwei zu einander parallelen Gebilde: *a*) zwei Räume, *b*) Raum und Ebene, *c*) Raum und Gerade, *d*) zwei Ebenen, *e*) Ebene und Gerade, *f*) zwei Geraden.

Aufgabe 139. Einen Raum zu konstruieren, welcher einem gegebenen Raume parallel ist und von diesem einen gegebenen Abstand hat.

Aufgabe 140. Durch eine gegebene Ebene einen Raum zu legen, welcher auf einem gegebenen Raume senkrecht steht.

Digitized by Google

Aufgabe 141. Den Abstand zweier willkürlich gegebener Geraden g, g' zu bestimmen.

[Man suche die Ebene ε, welche g, g' senkrecht schneidet und lege zu diesem Zwecke zunächst nach Aufgabe 137 durch irgend einen Punkt P die g, g' senkrecht kreuzende Ebene ε', wonach ε als Schnitt der durch g, g' zu ε' parallelen Räume erscheint. Der gesuchte Abstand wird dann von den Schnittpunkten von g, g' mit ε begrenzt.]

Aufgabe 142. Den Abstand einer gegebenen Gerade g von einer gegebenen Ebene ε zu bestimmen.

[Man suche die Gerade g', welche g und ε senkrecht schneidet, indem man durch ε einen zu g parallelen Raum R_3 legt und sodann die Schnittlinie der Ebene ε' durch g senkrecht zu R_3 mit dem Raume R'_3 durch ε senkrecht zu R_3 bestimmt, u. s. w.]

Aufgabe 143. Eine Ebene zu finden, welche zu zwei gegebenen zu einander halb normalen Ebenen $\varepsilon', \varepsilon''$ halb normal ist und diese in Geraden schneidet.

[Man lege durch irgend einen Punkt P die zu $\varepsilon', \varepsilon''$ normalen Ebenen und durch $\varepsilon', \varepsilon''$ die zu der Schnittlinie dieser neuen Ebenen parallelen Räume R'_3, R''_3; die Schnittebene dieser Räume ist die gesuchte Ebene.]

Aufgabe 144. Durch einen gegebenen Punkt P eine Gruppe von vier zu einander senkrechten Geraden zu legen.

65. **Winkelbestimmungen im R_4.** Wir bestimmen zunächst den Winkel POQ zweier durch den Schnittpunkt O der Projektionsachsen gehender Geraden OP, OQ (Fig. 46). Zu diesem Zwecke konstruieren wir die wahre Länge OP_n, $OQ' = OQ_n$, $P_{12}Q'' = P_nQ_n$ der Seiten OP, OQ, PQ des Dreiecks OPQ, wo P und Q willkürliche Punkte der gegebenen Geraden sind,

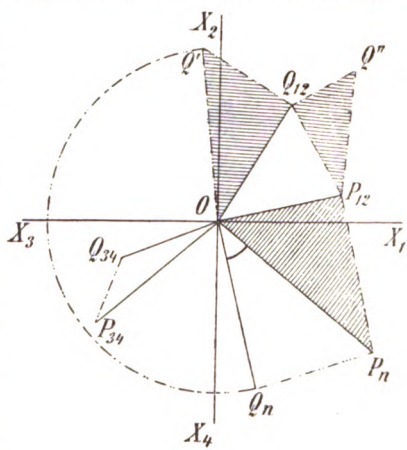


Fig. 46.

Digitized by Google

mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke $OP_{12}P_n$ ($P_{12}P_n = OP_{34}$), $OQ_{12}Q'$ ($Q_{12}Q' = OQ_{34}$), $P_{12}Q_{12}Q''$ ($Q_{12}Q'' = P_{34}Q_{34}$) und fügen diese zu einem Dreiecke OP_nQ_n zusammen. Der Winkel P_nOQ_n ist dann der gesuchte.

Zu dieser einfachen Konstruktion läfst sich im R_4 die Bestimmung des Winkels zwischen einer Gerade und einem R_d ($d = 1, 2, 3$) zurückführen. Ersetzt man die gegebenen Gebilde allemal durch zu ihnen parallele gleichnamige Gebilde, welche den Schnittpunkt O der Projektionsachsen enthalten, so hat man sich nur noch mit den Fällen $d = 2$ und $d = 3$ zu beschäftigen, und für P irgend einen von O verschiedenen Punkt der Gerade, für Q die Projektion von P auf den R_2 oder R_3 zu wählen. Und auch die Bestimmung des Winkels zwischen einem Raume und einem R_d ($d = 2, 3$) ist hiermit erledigt, indem wir irgend einen der beiden allgemeinen Sätze von Nr. 50 in Anwendung bringen.

Der einzige noch übrig bleibende Fall wird also von der Bestimmung der zwei Winkel zweier nur den Punkt O gemein habender Ebenen gebildet. Dabei beschränken wir uns vorläufig auf die Voraussetzung, dafs eine der beiden

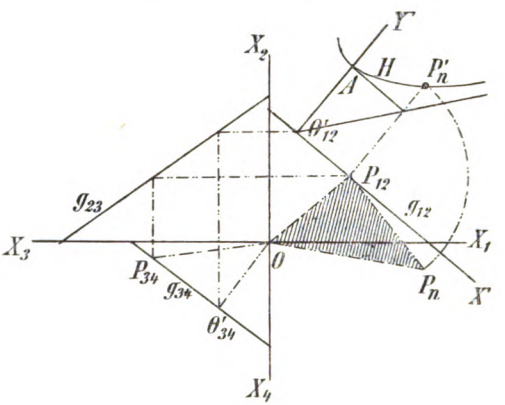


Fig. 47.

Ebenen mit der Projektionsebene $O(X_1X_2)$ zusammenfällt. Ist die andere Ebene durch O durch die beliebig gewählte Gerade g (Fig. 47) bestimmt, so mufs der Winkel zwischen dem von O ausgehenden Radiusvektor OP irgend eines auf

Digitized by Google

g liegenden Punktes P und seiner Projektion OP_{12} auf $O(X_1X_2)$ Minimum oder Maximum werden. Dieser Winkel wird mittels der Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks $OP_{12}P_n(P_{12}P_n = OP_{34})$ gefunden. Um nun zu entscheiden, für welche Punkte P von g die äufsersten Werte des spitzen Winkels $P_{12}OP_n$ eintreten, stellen wir die verschiedenen Dreiecke $OP_{12}P_n$ behufs Vergleichung folgendermafsen neben einander. Ist R_3 irgend ein Raum durch $O(X_1X_2)$, ε die in g_{12} auf $O(X_1X_2)$ senkrecht stehende Ebene dieses Raumes und setzen wir voraus, dafs diese neue Ebene die Katheten $P_{12}P_n$ aller Dreiecke $OP_{12}P_n$ enthält, so läfst die Umklappung dieser Ebene um g_{12} in $O(X_1X_2)$ diese Katheten $P_{12}P_n$ als in den Punkten P_{12} auf g_{12} errichtete Lote $P_{12}P'_n$ erscheinen. Ist H der Ort der Punkte P'_n in ε und $O(H)$ der Kegel mit O als Scheitel und H als Leitkurve, so gestaltet sich die Frage nach Minimum und Maximum des Winkels $P_{12}OP_n$ um in diejenige nach den äufsersten Werten der von den Erzeugenden dieses Kegels mit der Ebene $O(X_1X_2)$ gebildeten Winkel. Also mufs die Kurve H uns über diese Werte belehren. Und nun ergiebt sich, dafs diese Kurve einen der beiden Zweige einer Hyperbel darstellt. Ist nämlich O' der Punkt von g, dessen Projektion O'_{34} auf $O(X_3X_4)$ eine zu g_{34} senkrechte Verbindungsgerade mit O besitzt, wird $OO'_{34} = a$, $O'_{34}P_{34} = \xi$, $O'_{12}P_{12} = x'$, $P_{12}P'_n = P_{12}P_n = OP_{34} = y'$ gesetzt und giebt λ den unveränderlichen Wert des Verhältnisses $\frac{x'}{\xi}$ an, so findet man mittels Elimination von ξ aus den Gleichungen $y'^2 = a^2 + \xi^2$, $x' = \lambda\xi$ die Beziehung $y'^2 - \frac{x'^2}{\lambda^2} = a^2$, d. h. eine Hyperbel mit g_{12} als nicht schneidende Symmetrieachse, O'_{12} als Mittelpunkt, $O'_{12}A = OO'_{34} = a$ als halbe reelle, und, wenn $O'_{34}P_{34} = OO'_{34} = a$ genommen wird, $O'_{12}P_{12}$ als halbe imaginäre Achse. Es gilt nun nur noch diejenigen Erzeugenden dieses quadratischen Kegels $O(H)$ zu suchen, welche mit der Symmetrieebene $O(X_1X_2)$ den kleinsten und gröfsten Winkel bilden. Bringt man durch irgend einen von O verschiedenen Punkt dieses Kegels eine Ebene ε' parallel zu $O(X_1X_2)$, so schneidet diese Ebene den Kegel in einer Ellipse, deren Centrum sich in O auf $O(X_1X_2)$ projiziert.

Digitized by Google

Die Achsen dieser Ellipse projizieren sich dann auf $O(X_1 X_2)$ in zwei zu einander senkrechte Geraden OP'_{12}, OP''_{12}, aus welchen sich die zwei gesuchten Winkel unmittelbar ergeben. Wir finden hier also die bekannte Thatsache wieder, dafs die Ebenen der beiden Neigungswinkel senkrecht zu einander sind.

Anstatt auf das dreidimensionale Problem der Konstruktion der Schnittellipse tiefer einzugehen, bemerken wir schliefslich nur noch, dafs sich die Bestimmung der von zwei Ebenen im R_4 mit einander gebildeten Winkel mittels Einführung eines neuen Achsensystems[66,10] immer auf die obige Konstruktion zurückführen läfst.

Aufgabe 145. Zeige, dafs die zwei Winkel der Ebenen $O(X_1 X_2)$ und (Og) von Fig. 47 einander gleich werden, wenn O'_{12} der Fufspunkt des aus O auf g_{12} gefällten Lotes ist und aufserdem das unveränderliche Verhältnis λ den Wert $\frac{OO'_{12}}{OO'_{34}}$ hat.

Aufgabe 146. Zeige, dafs unter diesen Bedingungen, wie es die Theorie erheischt, auch die beiden Winkel der Ebenen $O(X_3 X_4)$ und (Og) einander gleich sind.

Aufgabe 147. Unter welchen Umständen sind die vier Winkel der beiden vorhergehenden Aufgaben 45^0?

66. **Transformation auf ein neues Achsensystem.** In aller Kürze berühren wir nun die Frage, wie man zu einem neuen Achsensysteme übergeht. Wir lassen dabei die ganz selbstverständliche Transformation auf parallele Achsen beiseite, setzen also voraus die beiden Systeme haben den nämlichen Ursprung O, und beschränken uns vorläufig auf den Raum R_4.

Rücksichtlich des Systems $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ sind — so setzen wir voraus — die vier zu je zwei zu einander senkrechten Geraden OP, OQ, OR, OS durch ihre Projektionen gegeben; wie transformiert man irgend welche in Bezug auf $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ angenommene Projektionen und Spuren auf $O(PQRS)$?

Wir bemerken, dafs die Frage im wesentlichen beantwortet ist, sobald wir nachgewiesen haben, wie aus den alten Projektionen eines Punktes T die neuen Projektionen

Digitized by Google

dieses Punktes konstruiert werden können. Und diese Konstruktion wird leicht verwirklicht, wenn man zwischen den Systemen $O(X_1\ X_2\ X_3\ X_4)$ und $O(PQRS)$ zwei Zwischenstufen einschaltet, welche es ermöglichen, bei jedem Schritte wenigstens eine der Achsen beizubehalten, und deshalb, mittels dreier sich in dreidimensionalen Räumen oder Ebenen abspielender, und also aus der gewöhnlichen darstellenden Geometrie bekannter partieller Transformationen, das gesteckte Ziel zu erreichen. Es sind diese Zwischenstufen als $O(X'_1\ X'_2\ X'_3\ X_4)$ und $O(X'_1\ X'_2\ X''_3\ S)$ zu kennzeichnen, wobei OX'_1 und OX'_2 irgend zwei zu einander senkrechte Geraden der Schnittebene ε der Räume $O(X_1\ X_2\ X_3)$ und $O(PQR)$ bedeuten und OX'_3 das in O auf den Raum $O(X'_1\ X'_2\ X_4)$, OX''_3 das in O auf den Raum $O(X'_1\ X'_2\ S)$ errichtete Lot angiebt. Versteht man unter P, Q, R, S bestimmte Punkte der neuen Achsen, so läfst sich der Übergang von $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ zu $O(X'_1\ X'_2\ X'_3\ X_4)$ folgenderweise zergliedern:

a) Bestimme die Spurgeraden $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$ der Schnittebene ε von $O(X_1\ X_2\ X_3)$ und $O(PQR)$ in $O(X_1\ X_2)$, $O(X_2\ X_3)$ mit Hilfe von irgend zwei der drei Seiten des Dreiecks PQR.

b) Betrachte ε_{12} als OX'_1, die Senkrechte zu ε_{12} durch O in ε als OX'_2 und das in O auf ε in $O(X_1\ X_2\ X_3)$ errichtete Lot als OX'_3.

c) Bezeichne der Reihe nach jeden der fünf Punkte P, Q, R, S, T mit A und ersetze für diesen Punkt die gegebenen Projektionen A_{12}, A_{34} durch die die Projektion A_{123} auf $O(X_1\ X_2\ X_3)$ bestimmenden zusammenhängenden Projektionen A_{12}, A_{23} und durch die Projektion A_4 auf OX_4.

d) Konstruiere mit Hilfe der gewöhnlichen darstellenden Geometrie mittels Umklappung der Ebenen $O(X'_1\ X'_2) = \varepsilon$ und $O(X'_2\ X'_3)$ in die Bildebene die Projektionen A'_{12}, A'_{23} der fünf Punkte auf $O(X'_1\ X'_2)$, $O(X'_2\ X'_3)$.

e) Leite endlich umgekehrt aus dem Systeme (A'_{12}, A'_{23}, A_4) für jeden der fünf Punkte das System (A'_{12}, A'_{34}) der Projektionen auf $O(X'_1\ X'_2)$, $O(X'_3\ X_4)$ ab.

Es werden diese Andeutungen hinreichen, um die erste Transformation, d. h. den Übergang von $O(X_1\ X_2\ X_3\ X_4)$ zu $O(X'_1\ X'_2\ X'_3\ X_4)$ zu erläutern. Weil die zweite Transformation von $O(X'_1\ X'_2\ X'_3\ X_4)$ zu $O(X'_1\ X'_2\ X''_3\ S)$ einfacher ist, indem sie sich in der Ebene $O(X'_3\ X_4) = O(X''_3\ S)$ abspielt,

Digitized by Google

und die dritte Transformation von $O(X_1' X_2' X_3'' S)$ zu $O(PQRS)$ eine Wiederholung der ersten ist, ist hiermit also die Theorie vollkommen erledigt.

Bei den Anwendungen von Achsentransformationen liegt die Sache meistens so, dafs entweder eine gegebene Gerade als Projektionsachse, oder eine gegebene Ebene als Projektionsebene, oder aber ein gegebener Raum als Projektionsraum eingeführt werden soll. So wird der allgemeine Fall der Bestimmung des Abstandes irgend eines Punktes P von einem gegebenen Raume[64] auf den besonderen Fall von Fig. 45 reduziert, wenn man eine Ebene durch O senkrecht zu diesem Raume als Projektionsebene $O(X_1' X_2')$ annimmt. So wird die Bestimmung der beiden Winkel irgend zweier gegebenen Ebenen ε, ε' auf den besonderen Fall der Nr. 65 zurückgeführt, wenn man die zu ε parallele Ebene durch O zur Projektionsebene $O(X_1' X_2')$ wählt. Bei der wirklichen Ausarbeitung dieser Konstruktionen hat man sich dann immer zu bemühen, von der Thatsache, dafs die Transformation noch nicht vollkommen bestimmt ist, Gebrauch zu machen, die bei der Ausführung in der Bildebene zu verwendende Mühe soviel wie möglich hinabzudrücken. So ist es im ersten Beispiel besonders empfehlenswert, in $O(X_2 X_3)$ und $O(X_4 X_1)$ neue Achsenkreuze $X_2' O X_3'$ und $X_4' O X_1'$ derart zu wählen, dafs $O X_2'$ zu LM und $O X_1'$ zu KN senkrecht ist, diese Achsen mittels Drehung der Ebenen $O(X_2 X_3)$ und $O(X_4 X_1)$ in sich in die ursprüngliche Lage zu bringen, aus den neuen Gröfsen $L' M_\infty'$, $K' N_\infty'$ und P_{23}', P_{41}' die entsprechenden Gröfsen $K' L'$ und P_{12}' abzuleiten und aus P_{12}' das Lot $P_{12}' Q_{12}'$ auf $K' L'$ zu fällen; so wird es im zweiten Beispiele vorteilhaft sein, die Achsen $O X_1'$ und $O X_4'$ respektive den Schnittgeraden von ε mit $O(X_1 X_2 X_3)$ und von einer zu ε normalen Ebene mit $O(X_2 X_3 X_4)$ parallel zu wählen, u. s. w.

Aufgabe 148. Verwirkliche die erstere Konstruktion in der Bildebene mit Inbegriff der Zurückkehr zu den ursprünglichen Achsen.

Soll irgend eine Gerade OP Projektionsachse werden, so kann man auch die Ebene bestimmen, welche OP enthält und mit jeder der beiden Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$ eine Gerade gemein hat (vergleiche Aufgabe 124). Sind OQ' und OR' diese neuen Geraden, so kommt man

Digitized by Google

mittels dreier Drehungen zum Ziele; denn die Drehung des neuen Systems um die in O zur Ebene $Q'OR'$ senkrechte Ebene, durch welche OP in die Lage OQ' gelangt, führt den Zurückgang vom neuen Systeme zum ursprünglichen auf jenen der vorhergehenden Konstruktion (Aufgabe 148) zurück. In dieser Richtung fortfahrend kommt man leicht zur Ausdehnung der Euler'schen Transformation auf R_4; allein, auf diesen Gedanken gehen wir hier nicht weiter ein.

Aus der allgemeinen Theorie ist nun leicht ersichtlich, wie sich im R_5 das Transformationsproblem gestaltet. Gilt es vom gegebenen Systeme $O(X_1\,X_2\,X_3\,X_4\,X_5)$ zum neuen rechtwinkligen Systeme $O(PQRST)$ überzugehen, so bestimme man den Schnittraum der vierdimensionalen Räume $O(X_1\,X_2\,X_3\,X_4)$, $O(PQRS)$ — was mit Hilfe von drei der vier Seitenflächen des Tetraeders $PQRS$ geschehen kann —, und konstruiere in diesem Raume drei zu je zwei zu einander senkrechte Geraden OX'_1, OX'_2, OX'_3. Sind nun OX'_4 und OX''_4 die in O respektive auf $O(X'_1X'_2X'_3X_5)$ und $O(X'_1\,X'_2\,X'_3\,T)$ errichteten Lote, so zergliedern die zwei Zwischenstufen $O(X'_1\,X'_2\,X'_3\,X'_4\,X_5)$ und $O(X'_1\,X'_2\,X'_3\,X''_4\,T)$ das Transformationsproblem in drei partielle Transformationen, von welchen die erste und die letzte Transformationen in R_4 sind und die mittlere wieder eine Transformation in der Ebene ist, u. s. w.

Aufgabe 149. Mit wieviel Transformationen in der Ebene ist die entsprechende Transformation in R_n äquivalent?

[Man hat die Rekursionsformel

$$t_n = 2t_{n-1} + 1$$

mit der Bedingung $t_2 = 1$, und findet deshalb

$$t_n = 2^{n-1} - 1.]$$

Aufgabe 150. Gegeben ein rechtwinkliges Achsensystem $O(X_1X_2 \ldots X_{2n})$ im R_{2n} und in den n Ebenen $O(X_{2k-1}X_{2k})$ die n Geraden OY_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots n$. Wie geht man am einfachsten über zu einem neuen rechtwinkligen Systeme, von welchem die Achsen OY_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots n$ einen Teil ausmachen?

67. **Schiefe Parallelprojektion.** Nennt man mit Steiner die Raumfigur gebildet von drei gleichen von einem

Digitized by Google

nämlichen Punkte O ausgehenden Strecken OA_1, OA_2, OA_3 auf zu einander senkrechten Geraden OX_1, OX_2, OX_3 ein *Dreibein*, so sagt der bekannte Pohlke'sche Satz aus, dafs drei in der Bildebene willkürlich angenommene von einem nämlichen Punkte O' ausgehende Strecken OA_1', OA_2', OA_3', wenn nur höchstens eine von ihnen verschwindet, immer als schiefe Parallelprojektion eines Dreibeins betrachtet werden kann. Für den Beweis dieses Satzes vergleiche man eine ganz kurze Abhandlung Küpper's (*Math. Ann.*, Bd. 33, S. 474, 1888).

Der Satz von Pohlke läfst sich unmittelbar auf mehrdimensionale Räume ausdehnen. Versteht man unter einem n-Bein im R_n die Figur gebildet von n gleichen von einem nämlichen Punkte O ausgehenden Strecken $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ auf zu einander senkrechten Geraden $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$, so findet man, dafs n in der Bildebene willkürlich gewählte von einem nämlichen Punkte O' ausgehende Strecken $O'A_1'$, $O'A_2', \ldots O'A_n'$, wenn nur höchstens $n-2$ von ihnen verschwinden, immer als schiefe Parallelprojektion eines n-Beins angesehen werden können. Der Beweis dieser Verallgemeinerung, welche sich später als nützlich bewähren wird, wird sehr leicht geführt. Sind nämlich im R_n in irgend einer Bildebene ε (Fig. 48) die von O' ausgehenden Strecken $O'A_1'$, $O'A_2', \ldots O'A_n'$ willkürlich gewählt, so giebt es in irgend einem durch ε gehenden Raume von R_n ein Dreibein $O(A_1, A_2, A_3)$, für welches $A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'$ zu einander parallele Geraden sind (Satz von Pohlke). Ergänzt man nun dieses Dreibein im R_n auf irgend eine Weise zu einem n-Bein $O(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n)$ und nimmt die Räume R_{n-2}, welche die Punkte $O, A_1, A_2, \ldots A_n$ auf ε projizieren sollen, zu den $n-2$ Geraden $A_3A_3', A_4A_4', \ldots A_nA_n'$ parallel,

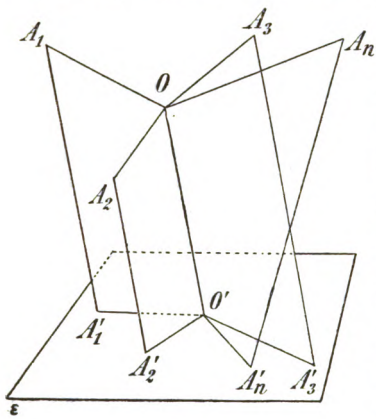


Fig. 48.

Digitized by Google

so erscheint die in ε gegebene Figur $O'(A_1', A_2', \ldots A_n')$ als schiefe Parallelprojektion des n-Beins.

Im achten Paragraphen werden wir untersuchen, auf wie vielfach unendliche Weise n in der Bildebene von einem nämlichen Punkte O' ausstrahlende Strecken die schiefe Parallelprojektion eines n-Beins bilden können. Da wird sich auch ergeben, dafs der Pohlke'sche Satz vom theoretischen Standpunkte aus noch andere Verallgemeinerungen zuläfst. Hier möge es hinreichen zu bemerken, dafs wir uns im zweiten Teile öfters der schiefen Parallelprojektion bedienen werden; besonders dann, wenn in den Figuren keine nicht schon durch das Achsensystem gegebene, einander senkrecht zugeordnete uneigentliche Elemente auftreten, wird sich diese Projektion als sehr brauchbar erweisen.

68. **Axonometrische Projektion, Perspektive.** Mit einem einzigen Worte wollen wir noch auf die einfachste Verallgemeinerung der dreidimensionalen Axonometrie und Perspektive hinweisen.

Schneidet man im R_n die n Achsen $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ eines gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystems mit einem willkürlich angenommenen Raume R_{n-1}, so bilden die Schnittpunkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Eckpunkte eines Simplex $S(n)$, welches die ganz besondere Eigenschaft hat, dafs die aus den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seitenräume R_{n-2} gefällten Lote sich in einem Punkte, der Projektion O' von O auf R_{n-1}, schneiden. Es steht nämlich die Ebene durch OA_1 und OO' senkrecht auf dem Seitenraume R_{n-2} des $S(n)$, welcher dem Punkt A_1 gegenüber liegt; denn da OA_1 auf dem Raume $O(X_2 X_3 \ldots X_n)$ und OO' auf dem gegebenen Raume R_{n-1} senkrecht steht, so mufs die Ebene $O'OA_1$ zum Schnitte R_{n-2} dieser Räume R_{n-1} normal sein. Also steht jede durch den Schnittpunkt A_1' dieser Ebene mit R_{n-2} gehende Gerade dieser Ebene in A_1' auf R_{n-2} senkrecht und ist dies auch mit A_1A_1' der Fall. Deshalb wird OO' von A_1A_1' geschnitten; d. h. das Lot A_1A_1' aus A_1 auf den gegenüberliegenden Seitenraum R_{n-2} geht durch den einzigen Punkt O', welchen das aus O auf den gegebenen Raum R_{n-1} gefällte Perpendikel mit diesem R_{n-1} gemein hat; d. h. alle Lote $A_1A_1', A_2A_2', \ldots A_nA_n'$ aus den Eckpunkten von $S(n)$ auf die gegenüberliegenden Seiten-

Digitized by Google

räume R_{n-2} gefällt, gehen durch die Projektion O' von O auf den das $S(n)$ enthaltenden Raum R_{n-1}. Deshalb sind diese Lote $O'A_1, O'A_2, \ldots O'A_n$ die Projektionen der Achsen $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ auf den gegebenen Raum R_{n-1}. Wird nun irgend eine auf das gegebene Koordinatensystem bezogene Figur senkrecht projiziert auf den gegebenen Raum R_{n-1}, so sind also in diesem „Bildraume" $O'A_1, O'A_2, \ldots O'A_n$ die axonometrischen Achsen des Bildes. Wir verzichten hier darauf, die diesen Achsen entsprechenden Verkürzungen zu untersuchen, kommen aber nachher auf diesen Gegenstand und auf das eigentümlich gebaute $S(n)$ zurück.

Hat man im R_n irgend einen Punkt O als Auge, irgend einen O nicht enthaltenden Raum R_{n-1} als „Bildraum" angenommen, so kann man jeden Raum R_m $(m < n-1)$ aus O auf R_{n-1} projizieren, indem man R_{n-1} schneidet durch den O und R_m verbindenden Raum R_{m+1}. Die so erhaltene *centrale Projektion* oder *Perspektive* von R_m ist dann entweder ein R'_m oder ein R'_{m-1}, je nachdem R_m den Punkt O nicht oder wohl enthält. Versteht man dann unter *Schnitt-* und *Fluchtraum* von R_m die Schnitträume des Bildraumes R_{n-1} mit R_m und dem durch O zu R_m parallelen Raume, so kann man mit Hilfe dieser in der centralen Projektion R'_m liegenden Räume R_{m-1} aus dem perspektiven Bilde auf R_m zurückschliefsen; aufserdem gewinnt man hierdurch den bedeutenden Vorteil, auch von der Perspektive von Räumen R_{n-1} reden zu können. Allein, auch auf diesen Gegenstand gehen wir hier nicht weiter ein, da wir weder von axonometrischen, noch von perspektiven Bildern Gebrauch machen werden.

Aufgabe 151. Sind die Räume R_{m_1} und R_{m_2} $(m_1 < m_2)$ einander parallel, so liegt der Fluchtraum R'_{m_1-1} von R_{m_1} im Fluchtraume R'_{m_2-1} von R_{m_2}. Man wünscht den Beweis dieses Satzes.

Der Begriff der centralen Projektion läfst sich noch bedeutend erweitern. Liegen z. B. im R_n ein Simplex $S(m+1)$ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots A_{m+1}$ und aufserdem ein beliebiger Punkt B gegeben vor, so kann man aufser den Schnittpunkten B_i der Geraden BA_i durch A_i mit den diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenräumen $R^{(i)}_{m-1}$ auch die Schnittpunkte $B_{i,k}$ der Ebenen BA_iA_k durch A_iA_k mit den diesen Kanten gegenüberliegenden Seitenräumen

Digitized by Google

$R_{m-2}^{(i,k)}$, die Schnittpunkte $B_{i,k,l}$ der Räume $BA_iA_kA_l$ durch $A_iA_kA_l$ mit den diesen Seitenflächen gegenüberliegenden Seitenräumen $R_{m-3}^{(i,k,l)}$, u. s. w. bestimmen, und die so erhaltenen Punkte B_i, $B_{i,k}$, $B_{i,k,l}$, ... als Projektionen von B aus den Eckpunkten A_i, den Kanten A_iA_k, den Seitenflächen $A_iA_kA_l$, ... auf die gegenüberliegenden Seitenräume $R_{m-1}^{(i)}$, $R_{m-2}^{(i,k)}$, $R_{m-3}^{(i,k,l)}$ ... deuten. Es ist dann (Fig. 49) $B_{i,k}$ nicht nur die Projektion von B aus A_iA_k, sondern auch die Projektion von B_i aus A_k und von B_k aus A_i, ebenso $B_{i,k,l}$ nicht nur die Projektion von B aus $A_iA_kA_l$, sondern auch die Projektion von B_i aus A_kA_l, von B_k aus A_iA_l, von B_l aus A_iA_k, von $B_{k,l}$ aus A_i, von $B_{i,l}$ aus A_k, von $B_{i,k}$ aus A_l, u. s. w.

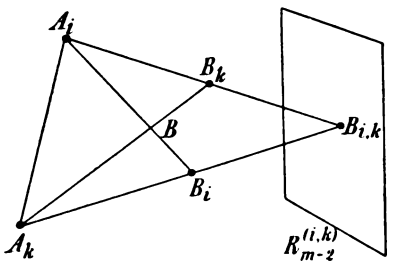


Fig. 49.

Aufgabe 152. Beweise, dafs der Punkt $B_{i,k,l,\ldots}$ mit p Indices auf diese Weise die Projektion von $2^p - 1$ Punkten ist.

Obige Verallgemeinerung der centralen Projektion kann noch weiter fortgesetzt werden, wenn man zuläfst, dafs die Projektion in Dimensionenzahl verschieden sei vom projizierten Gebilde. Auch auf diesen Gedanken gehen wir hier nicht näher ein.

---

§ 6. Analytische Geometrie.

69. **Der Abstand zweier Punkte.** Wir schliefsen an Nr. 22 an, denken uns im R_n irgend ein schiefwinkliges Koordinatensystem $O(X_1X_2 \ldots X_n)$ gegeben und berechnen nun zuerst den Abstand eines Punktes P mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vom Ursprunge O. Dieser Abstand OP mufs ausdrückbar sein in den Koordinaten x_i und den zwischen den Achsenpaaren enthaltenen Winkeln X_iOX_k, welche mit

Digitized by Google

λ_{ik} bezeichnet werden mögen. Wirklich findet man allgemein

$$\overline{OP}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2x_1x_2\cos\lambda_{12} + 2x_1x_3\cos\lambda_{13} + \ldots + 2x_{n-1}x_n\cos\lambda_{n-1,n}$$

oder in abgekürzter Form

$$\overline{OP}^2 = \sum_1^n x_i^2 + 2\sum_1^n x_i x_k \cos\lambda_{i,k}. \qquad 11)$$

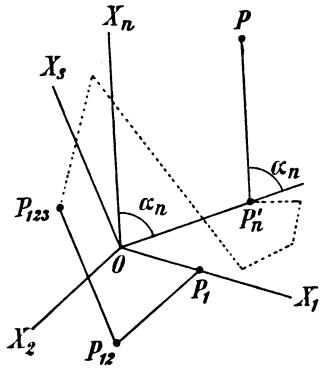


Fig. 50.

Der einfachste Beweis beruht wieder auf der Schlufsweise von $n-1$ auf n. Ist (Fig. 50) P'_n die Projektion von P aus dem uneigentlichen Punkte von OX_n auf den Koordinatenraum $O(X_1X_2\ldots X_{n-1})$ und α_n der Winkel P'_nOX_n, so hat man

$$\overline{OP}^2 = \overline{OP'_n}^2 + x_n^2 + 2\,OP'_n \cdot x_n\cos\alpha_n.$$

Betrachtet man nun im Raume $O(X_1X_2\ldots X_{n-1})$ den Punkt P'_n mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ und projiziert man senkrecht auf OX_n die Strecke OP'_n und den von O nach P'_n führenden Weg, welchen man erhält, wenn man die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ wie mit Vorzeichen behaftete Strecken nach dem Vorgange Grafsmann's[23] von O aus an einander reiht, so findet man, mit Hilfe des bekannten Satzes, dafs die Projektionen zweier verschiedener Wege, welche zwei gegebene Punkte verbinden, auf irgend eine Gerade einander gleich sind, die Beziehung

$$OP'_n\cos\alpha_n = x_1\cos\lambda_{1,n} + x_2\cos\lambda_{2,n} + \ldots + x_{n-1}\cos\lambda_{n-1,n}.$$

Somit erhält man die Gleichung

$$\overline{OP}^2 = \overline{OP'_n}^2 + x_n^2 + 2(x_1\cos\lambda_{1,n} + x_2\cos\lambda_{2,n} + \ldots + x_{n-1}\cos\lambda_{n-1,n})\,x_n,$$

welche aussagt, dafs der Ausdruck 11) für R_n gilt, sobald der entsprechende Ausdruck für R_{n-1} gilt. Da die

Digitized by Google

Formel 11) für $n = 1$ eine Identität wird, gilt sie also allgemein.

Aufgabe 153. Wie wird der oben verwendete allgemeine Projektionssatz im R_n bewiesen?

Sind nun zwei Punkte P, Q mit den Koordinaten x_i, y_i gegeben, so führt man diesen Fall mittels einer parallelen Verschiebung des Koordinatensystems auf den vorhergehenden zurück. Wird Q als neuer Ursprung gewählt, so sind $x_i - y_i$ die neuen Koordinaten von P und findet man

$$\overline{PQ}^2 = \sum_1^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_1^n (x_i - y_i)(x_k - y_k) \cos \lambda_{i,k}. \quad 12)$$

Im rechtwinkligen Koordinatensystem sind alle Winkel $\lambda_{i,k}$ rechte und hat man also einfacher

$$\overline{PQ}^2 = \sum_1^n (x_i - y_i)^2. \quad 13)$$

Im Falle $n = 4$ (Fig. 51) ist nun

$$\overline{P_{12}Q_{12}}^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2,$$

$$\overline{P_{34}Q_{34}}^2 = (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

und hat man also auch

$$d^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{P_{12}Q_{12}}^2 + \overline{P_{34}Q_{34}}^2,$$

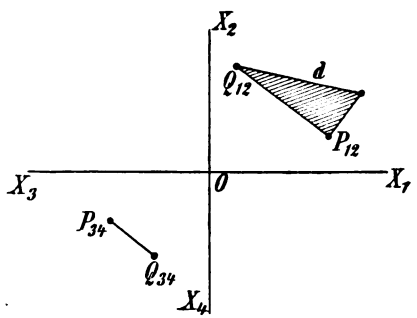


Fig. 51.

durch welche Gleichung eine früher gegebene Konstruktion(64a) erläutert wird.

Denkt man sich in 12) und 13) die Koordinaten x_i veränderlich, hingegen PQ und die Koordinaten y_i unveränderlich, so stellen diese Gleichungen den Ort der Punkte dar, welche von einem gegebenen Punkte Q einen gegebenen Abstand haben. Dieser *Kugelraum* K_{n-1} mit Q als Mittelpunkt und PQ als Radius wird später untersucht werden.

70. **Die Achsenwinkel einer Gerade.** Ist α_i der Winkel POX_i, so erhält man, wenn man den von O nach P führenden Koordinatenweg $OP_1P_{12}P_{123} \ldots P_nP$ und OP

Digitized by Google

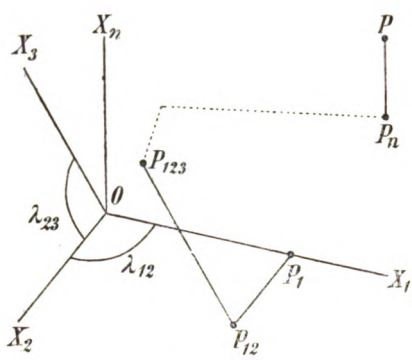


Fig. 52.

(Fig. 52) nach einander auf die Achsen OX_1, $OX_2, \ldots OX_n$ und auf OP projiziert, die $n+1$ Gleichungen

$$x_1 \cos \lambda_{1,i} + x_2 \cos \lambda_{2,i} + \ldots + x_n \cos \lambda_{n,i} = OP \cos \alpha_i,$$

$$x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + \ldots + x_n \cos \alpha_n = OP.$$

Also ergiebt sich durch Elimination der $n+1$ homogen in diesen Gleichungen auftretenden Gröfsen x_i, OP die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda_{12} & \cos \lambda_{13} & \ldots & \cos \lambda_{1,n} & \cos \alpha_1 \\ \cos \lambda_{21} & 1 & \cos \lambda_{23} & \ldots & \cos \lambda_{2,n} & \cos \alpha_2 \\ \cos \lambda_{31} & \cos \lambda_{32} & 1 & \ldots & \cos \lambda_{3,n} & \cos \alpha_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos \lambda_{n,1} & \cos \lambda_{n,2} & \cos \lambda_{n,3} & \ldots & 1 & \cos \alpha_n \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & \ldots & \cos \alpha_n & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 14)$$

wo allgemein $\cos \lambda_{i,k} = \cos \lambda_{k,i}$ ist.

Dies ist die einzige Beziehung, welche zwischen den n Winkeln α_i und den $\frac{1}{2} n (n-1)$ von einander unabhängigen Gröfsen $\lambda_{i,k}$ besteht. Sie geht für das rechtwinklige Koordinatensystem über in

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1. \quad 15)$$

Aufgabe 154. Eine Gerade OP bildet mit den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems im R_4 gleiche Winkel. Wie grofs sind die Winkel?

Aufgabe 155. In welche Form geht 14) über, wenn alle $\lambda_{i,k} = \lambda$ und alle $\alpha_i = \alpha$ sind?

[Mittels Umbildung der Determinante findet man

$$n \cos^2 \alpha = (n-1) \cos \lambda + 1, \quad 16)$$

Digitized by Google

welche Gleichung z. B. für $\cos\alpha = \cos\lambda$ aufser durch die selbstverständliche Lösung $\cos\alpha = \cos\lambda = 1$ noch durch $\cos\alpha = \cos\lambda = -\frac{1}{n}$ befriedigt wird. Hiervon werden wir später eine Anwendung machen.]

71. **Der Winkel zweier Geraden.** Sind zwei durch O gehende Geraden OP, OP' gegeben und ist α_i der Winkel POX_i, α_i' der Winkel $P'OX_i$, so erhält man mittels Projektion des Koordinatenweges[69a] von O nach P und der Strecke OP auf die Achsen und auf OP' die $n+1$ Gleichungen

$$x_1\cos\lambda_{1,i} + x_2\cos\lambda_{2,i} + \ldots + x_n\cos\lambda_{n,i} = OP\cos\alpha_i,$$
$$x_1\cos\alpha_1' + x_2\cos\alpha_2' + \ldots + x_n\cos\alpha_n' = OP\cos\varphi,$$

wo φ den Winkel POP' bezeichnet. Elimination der Gröfsen x_i, OP giebt dann

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda_{12} & \cos\lambda_{13} & \ldots & \cos\lambda_{1,n} & \cos\alpha_1 \\ \cos\lambda_{21} & 1 & \cos\lambda_{23} & \ldots & \cos\lambda_{2,n} & \cos\alpha_2 \\ \cos\lambda_{31} & \cos\lambda_{32} & 1 & \ldots & \cos\lambda_{3,n} & \cos\alpha_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\lambda_{n,1} & \cos\lambda_{n,2} & \cos\lambda_{n,3} & \ldots & 1 & \cos\alpha_n \\ \cos\alpha_1' & \cos\alpha_2' & \cos\alpha_3' & \ldots & \cos\alpha_n' & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0; \quad 17)$$

für das rechtwinklige Koordinatensystem vereinfacht sich dies zu

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_1' + \cos\alpha_2\cos\alpha_2' + \ldots + \cos\alpha_n\cos\alpha_n' = \cos\varphi. \quad 18)$$

Aufgabe 156. Beweise mittels der Identität

$$(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2)(q_1^2+q_2^2+\ldots+q_n^2) - (p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n)^2$$
$$= (p_1q_2-p_2q_1)^2 + (p_1q_3-p_3q_1)^2 + \ldots + (p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1})^2,$$

dafs aus $\cos\varphi = 1$, der Gleichung 18) und der auf α_i und α_i' angewandten Gleichung 15) die Bedingungen $\alpha_i = \alpha_i'$ des Zusammenfallens von OP und OP' hervorgehen.

Aufgabe 157. Beweise für rechtwinklige Achsen die Formeln:

$$\sin^2\varphi = \sum_1^n(\cos\alpha_i\cos\alpha_k' - \cos\alpha_k\cos\alpha')^2,$$

$$4\cos^2\frac{1}{2}\varphi = \sum_1^n(\cos\alpha_i+\cos\alpha_i')^2,\ 4\sin^2\frac{1}{2}\varphi = \sum_1^n(\cos\alpha_i-\cos\alpha_i')^2.$$

Digitized by Google

Aufgabe 158. Wenn α_1, α'_2 und alle Winkel $\lambda_{i,k}$ rechte sind, alle anderen Winkel α_i und α'_i den nämlichen Wert α haben, so findet man $\cos\varphi = (n-2)\cos^2\alpha$ und also mit Hilfe der für R_{n-1} umgebildeten Gleichung 16)

$$\cos\varphi = \frac{n-2}{n-1}.$$

Man wünscht den Beweis.

72. **Koordinatentransformation.** Wir betrachten (Fig. 53) zwei verschiedene schiefwinklige Koordinatensysteme $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ und $O(X'_1 X'_2 \ldots X'_n)$, von welchen das erstere mit seinen $\frac{1}{2} n(n-1)$ Winkeln $\lambda_{i,k}$ gegeben, das zweite mit Hilfe des ersten bestimmt sein mag mittels der n^2 Winkel $\alpha_{i,k}$, welche die Achsen OX_i des ersten mit den Achsen OX'_k des zweiten bilden. Zwischen den n^2 Winkeln $\alpha_{i,k}$ existieren dann n Beziehungen von der Form 14).

Projiziert man nun die beiden von O nach P führenden Koordinatenwege $OP_1P_{12}P_{123}\ldots P_nP$ und $OP'_1P'_{12}P'_{123}\ldots P'_nP$ nach einander auf die n Achsen OX_i, so erhält man die n Gleichungen

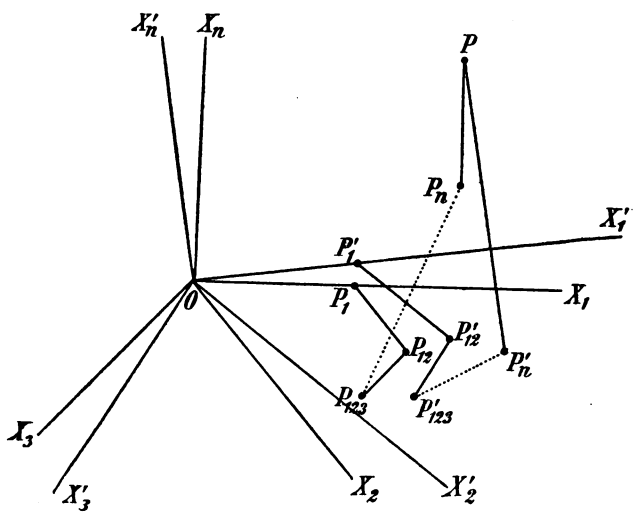


Fig. 53.

Digitized by Google

$$x_1 \cos \lambda_{i,1} + x_2 \cos \lambda_{i,2} + \ldots + x_n \cos \lambda_{i,n} =$$
$$x'_1 \cos \alpha_{i,1} + x'_2 \cos \alpha_{i,2} + \ldots + x'_n \cos \alpha_{i,n},$$

welche es ermöglichen, die Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ irgend eines Punktes P in den Koordinaten $(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ des nämlichen Punktes auszudrücken und umgekehrt. Es wird diese algebraische Operation bedeutend erleichtert durch Einführung der sogenannten *Richtparameter* der neuen Achsen OX'_k; es sind diese Gröfsen die Koordinaten der Punkte $Q'_1, Q', \ldots Q'_n$, welche man erhält, wenn man auf jeder Achse OX'_k von O aus in positivem Sinne die Einheitsstrecke OQ'_k abträgt. Sind $(a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots a_{n,k})$ die Koordinaten von Q'_k in Bezug auf $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$, so hat man allgemein

$$\cos \alpha_{i,k} = a_{1,k} \cos \lambda_{1,i} + a_{2,k} \cos \lambda_{2,i} + \ldots + a_{n,k} \cos \lambda_{n,i},$$

wie sich unmittelbar ergiebt, wenn man OQ'_k und den alten Koordinatenweg von Q'_k auf OX_i projiziert. Und mittels dieser n^2 Beziehungen vereinfachen sich die n Gleichungen zwischen x_i und x'_k zu

$$x_i = a_{i,1} x'_1 + a_{i,2} x'_2 + \ldots + a_{i,n} x'_n. \qquad 19)$$

Aufgabe 159. Welchen Bedingungen sind die n^2 Richtparameter $a_{i,k}$ unterworfen?

[Man erhält die in Rede stehenden n Bedingungen, wenn man die Ausdrücke für $\cos \alpha_{i,1}, \cos \alpha_{i,2}, \ldots \cos \alpha_{i,n}$ in 14) einführt und nachher i durch $1, 2, \ldots n$ ersetzt.]

Ist das ursprüngliche Koordinatensystem rechtwinklig, so ist $a_{i,k} = \cos \alpha_{i,k}$; die n Bedingungsgleichungen zwischen den n^2 Gröfsen $a_{i,k}$ nehmen dann die Form 15) an.

Ist aufserdem das neue Koordinatensystem rechtwinklig, so gelten neben den n Beziehungen

$$a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + \ldots + a_{i,n}^2 = 1$$

noch die Gleichungen

$$a_{1,k}^2 + a_{2,k}^2 + \ldots + a_{n,k}^2 = 1,$$
$$a_{i,1} a_{j,1} + a_{i,2} a_{j,2} + \ldots + a_{i,n} a_{j,n} = 0,$$
$$a_{1,k} a_{1,l} + a_{2,k} a_{2,l} + \ldots + a_{n,k} a_{n,l} = 0.$$

Hieraus folgt dann leicht, dafs die n Gleichungen

$$x'_k = a_{1,k} x_1 + a_{2,k} x_2 + \ldots + a_{n,k} x_n \qquad 20)$$

die Umkehrungen der Gleichungen 19) sind.

Digitized by Google

Aufgabe 160. Die Determinante der n^2 Grösen $a_{i,k}$, welche bei zwei rechtwinkligen Achsensystemen auftreten, besitzt folgende Eigenschaften:

a) Die Summe der Quadrate der Elemente einer vertikalen oder einer horizontalen Reihe ist die Einheit.

b) Die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente zweier paralleler Reihen verschwindet.

c) Die Determinante hat den Wert ± 1.

d) Der Quotient irgend eines Elements in seinen Minor ist allemal entweder $+1$ oder -1.

[Die Eigenschaften *a*) und *b*) entsprechen obigen Bedingungsgleichungen. Und *c*) und *d*) ergeben sich, wenn man das System 19) mit Hilfe von Determinanten nach x'_k löst und das Resultat mit 20) vergleicht.]

Die allgemeine Koordinatentransformation wird nun erhalten, indem man die bis jetzt behandelte mit einer parallelen Verschiebung in Verbindung setzt; auf diesen selbstverständlichen Gegenstand gehen wir nicht näher ein.

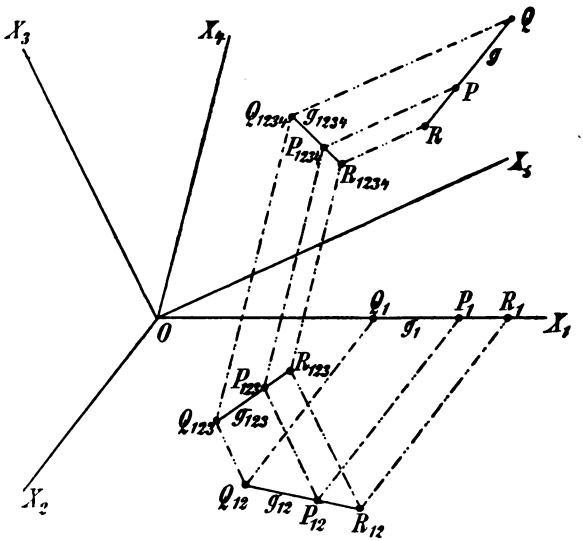


Fig. 54.

Digitized by Google

73. **Die Gerade.** Sind (Fig. 54) die Punktetripel

$$(P_1, Q_1, R_1),\ (P_{12}, Q_{12}, R_{12}),\ (P_{123}, Q_{123}, R_{123}),\ \ldots$$

der Reihe nach die Projektionen der drei Punkte (P, Q, R) einer Gerade g auf OX_1, $O(X_1 X_2)$, $O(X_1 X_2 X_3)$, ..., so ist

$$\frac{Q_1 P_1}{P_1 R_1} = \frac{Q_{12} P_{12}}{P_{12} R_{12}} = \frac{Q_{123} P_{123}}{P_{123} R_{123}} = \ldots = \frac{QP}{PR}.$$

Sind allgemein (P_i, Q_i, R_i) die Projektionen auf die Achse OX_i, so hat man also auch

$$\frac{Q_1 P_1}{P_1 R_1} = \frac{Q_2 P_2}{P_2 R_2} = \ldots = \frac{Q_n P_n}{P_n R_n} = \frac{QP}{PR}.$$

Betrachtet man nun die Punkte Q, R mit den Koordinaten y_i, z_i als die bestimmenden Punkte der Gerade g, hingegen P mit den Koordinaten x_i als einen veränderlichen Punkt dieser Gerade, und nennt man das Verhältnis $\frac{QP}{PR}$ kurz λ, so findet man

$$x_1 = \frac{y_1 + \lambda z_1}{1 + \lambda},\ x_2 = \frac{y_2 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \ldots x_n = \frac{y_n + \lambda z_n}{1 + \lambda}. \quad 21)$$

Für einen gegebenen Wert von λ ergeben diese n Gleichungen einen bestimmten Punkt der Gerade QR; giebt man λ successive alle Werte von der negativen bis zur positiven Unendlichkeit, so erhält man alle Punkte P dieser Gerade. Man sagt daher, die Gerade sei mittels der n Gleichungen 21) in ihre einzelnen Punkte aufgelöst.

Aufgabe 161. Welche Lage hat jedes Punktepaar mit entgegengesetzt gleichen Werten von λ in Bezug auf Q, R?

Aufgabe 162. Welcher Punkt der Gerade entspricht der Voraussetzung $\lambda = -1$?

Mittels Elimination von λ aus 21), oder mehr direkt aus den unmittelbar vorhergehenden Gleichungen, erhält man

$$\frac{x_1 - y_1}{y_1 - z_1} = \frac{x_2 - y_2}{y_2 - z_2} = \ldots = \frac{x_n - y_n}{y_n - z_n}, \quad 22)$$

was, weil die Nenner dieser Brüche bekannte Gröfsen sind, auch in der Form

$$\frac{x_1 - y_1}{a_1} = \frac{x_2 - y_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - y_n}{a_n} \quad 23)$$

Digitized by Google

geschrieben werden kann; die n „Richtungskoeffizienten“ a_i sind den unendlich grofsen Koordinaten des uneigentlichen Punktes der Gerade proportional.

Man kann die Elimination von λ auch anders vornehmen, indem man die letzte der Gleichungen 21) mit jeder der übrigen kombiniert. Man erhält dann:

$$x_1 = b_1 x_n + c_1,\ x_2 = b_2 x_n + c_2, \ldots, x_{n-1} = b_{n-1} x_n + c_{n-1}. \quad 24)$$

Diese Gleichungen binden der Reihe nach $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ an x_n. Sie entsprechen deshalb den durch g gehenden Räumen R_{n-1}, welche der Reihe nach allen Achsen, mit Ausnahme der in den Ebenen $O(X_1 X_n)$, $O(X_2 X_n), \ldots O(X_{n-1} X_n)$ liegenden, parallel sind und also diese Ebenen in den Projektionen $g_{1,n}$, $g_{2,n}, \ldots g_{n-1,n}$ von g schneiden.

Aufgabe 163. Weshalb ist es unvollständig, wenn man sagt, dafs die $n-1$ Gleichungen 24) die Projektionen $g_{i,n}$ darstellen?

[Weil jede dieser Gleichungen an sich einem projizierenden Raume R_{n-1} entspricht und man das Gleichungssystem der entsprechenden Projektion erst durch Kombination mit $n-2$ der Gleichungen $x_i = 0$ erhält.]

Wir bemerken, dafs Ersetzung des Systems 24) durch

$$x_1 = b_1 x_2 + c_1,\ x_2 = b'_2 x_3 + c'_2, \ldots, x_{n-1} = b'_{n-1} x_n + c'_{n-1}$$

sich den Entwickelungen der darstellenden Geometrie, wo die Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_2 X_3), \ldots O(X_{n-1} X_n)$ angewendet wurden, besser anpassen würde. Wir ziehen jedoch begreiflicherweise die Formeln 24) vor.

Zum Zwecke der Verallgemeinerung der Darstellung der Gerade zur Darstellung irgend eines Raumes R_d ersetzen wir λ durch den Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ und die Koordinaten y_i, z_i durch $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, wobei die gegebenen Punkte dann auch $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ heifsen mögen. Die Formeln 21) gehen dann über in

$$x_i = \frac{\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)}}{\lambda_1 + \lambda_2},\ (i = 1, 2, \ldots n), \quad 25)$$

Digitized by Google

d. h. der Punkt P erscheint als Schwerpunkt der in $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ gedachten Massen λ_1, λ_2, oder besser — im Hinblick nämlich auf die Fälle, wo λ_1, λ_2 verschiedene Vorzeichen haben — als Angriffspunkt der Resultierende der in $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ angreifenden parallelen Kräfte λ_1, λ_2.

Aufgabe 164. Leite aus jedem der Gleichungssysteme 21) bis 25) die Koordinaten des Schnittpunktes der Gerade mit dem Koordinatenraume $O(X_1 X_2 \ldots X_{n-1})$ ab.

74. **Die Ebene.** Sind die Punkte $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ (Fig. 55) mit den ihnen zugeordneten Parametern λ_1, λ_2, λ_3 gegeben, so kann man auf der Gerade $P^{(1)}P^{(2)}$ den Punkt Q und auf der Gerade $QP^{(3)}$ den Punkt P derart bestimmen, dafs

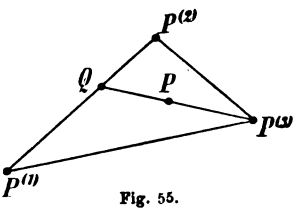


Fig. 55.

$$\frac{P^{(1)}Q}{QP^{(2)}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{QP}{PP^{(3)}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

wird. Sind nun $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, y_i, x_i$ der Reihe nach die Koordinaten von $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, Q, P, so findet man in Übereinstimmung mit den Formeln 25)

$$y_i = \frac{\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_i = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) y_i + \lambda_3 x_i^{(3)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

und deshalb auch

$$x_i = \frac{\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \lambda_3 x_i^{(3)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, (i = 1, 2, \ldots n), \quad 26)$$

d. h. P erscheint wieder als Schwerpunkt der in $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ gedachten Massen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oder als Angriffspunkt der Resultierende der in $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ angreifenden parallelen Kräfte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ändern nun die Verhältnisse der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ihre Werte, so bleibt Q immer ein Punkt der Gerade $P^{(1)}P^{(2)}$, also P immer ein Punkt der Ebene $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$; d. h. diese Ebene ist mittels der Gleichungen 26) in ihre Punkte aufgelöst.

Aufgabe 165. Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}$?

Digitized by Google

Aufgabe 166. Beweise die Beziehungen

$$\frac{\lambda_1}{Inhalt\ P^{(2)}P^{(3)}P} = \frac{\lambda_2}{Inhalt\ P^{(3)}P^{(1)}P} = \frac{\lambda_3}{Inhalt\ P^{(1)}P^{(2)}P}.$$

Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aus der letzten, der vorletzten und irgend einer andern der n Gleichungen 26) führt zu den $n-2$ Gleichungen

$$x_i = a_i x_{n-1} + b_i x_n + c_i, \ (i = 1, 2 \ldots n-2), \qquad 27)$$

welche der Reihe nach jede der $n-2$ Koordinaten x_i an x_{n-1} und x_n binden und also den Räumen R_{n-1} durch ε entsprechen, welche ε projizieren auf die $n-2$ verschiedenen Koordinatenräume $O(X_i X_{n-1} X_n)$ durch die Projektionsebene $O(X_{n-1} X_n)$.

Aufgabe 167. Wie ergiebt sich aus jeder der beiden Formelgruppen 26), 27), dafs das Unendliche der Ebene eine Linie ist?

75. **Der Raum R_d.** Sind $d+1$ von einander unabhängige Punkte $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(d+1)}$ gegeben und ist jedem dieser Punkte $P^{(k)}$ ein Parameter λ_k zugeordnet, so kann man respektive auf den Geraden $P^{(1)}P^{(2)}$, $Q^{(1)}P^{(3)}$, $\ldots$ $Q^{(d-2)}P^{d}$, $Q^{(d-1)}P^{(d+1)}$ die Punkte $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots Q^{(d-1)}, P$ so bestimmen, dafs

$$\frac{P^{(1)}Q^{(1)}}{Q^{(1)}P^{(2)}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{Q^{(1)}Q^{(2)}}{Q^{(2)}P^{(3)}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}, \frac{Q^{(2)}Q^{(3)}}{Q^{(3)}P^{(4)}} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \ldots$$

$$\frac{Q^{(d-2)}Q^{(d-1)}}{Q^{(d-1)}P^{(d)}} = \frac{\lambda_d}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{d-1}}$$

und endlich

$$\frac{Q^{(d-1)}P}{PP^{(d+1)}} = \frac{\lambda_{d+1}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_d}$$

wird. Sind nun wieder $x_i^{(k)}, y_i^{(l)}, x_i$ der Reihe nach die Koordinaten von $P^{(k)}, Q^{(l)}, P$, so erhält man in der oben angegebenen Weise, wie mittels der Schlufsweise von $m-1$ auf m gezeigt wird, zunächst

$$y_i^{(d-1)} = \frac{\lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_d x_i^{(d)}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_d}$$

Digitized by Google

und nachher

$$x_i = \frac{\sum_1^{d+1} \lambda_k x_i^{(k)}}{\sum_1^{d+1} \lambda_k}, \quad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad 28)$$

Bei Anderung der Verhältnisse der $d+1$ Parameter λ_k beschreibt der Punkt P den durch die $d+1$ Punkte P_k bestimmten Raum R_d; dieser Raum R_d ist deshalb in den Gleichungen 28) in seine Punkte aufgelöst.

Durch zweckmäfsige Elimination der Verhältnisse der $d+1$ Parameter λ_k findet man die Gleichungen

$$x_i = a_i x_{n-d+1} + b_i x_{n-d+2} + \ldots + r_i x_n + s_i, \qquad 29)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n-d)$$

welche den den R_d auf die Räume $O(X_i X_{n-d+1} X_{n-d+2} \ldots X_n)$ projizierenden Räumen R_{n-1} entsprechen.

76. **Der Raum R_{n-1}.** Für $d = n-1$ erhält man aus 28)

$$x_i = \frac{\sum_1^{n} \lambda_k x_i^{(k)}}{\sum_1^{n} \lambda_k}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 30)$$

und ist also — wie wir hier zur Förderung weiterer Zwecke nochmals wiederholen — der Punkt P der Schwerpunkt der in den n Punkten P_i gedachten n Massen λ_i, oder der Angriffspunkt der Resultierende der in diesen Punkten angreifenden n parallelen Kräfte λ_i. Und weiter reduziert sich das System der Gleichungen 29) auf eine einzige Bedingung zwischen den Koordinaten x_i des Punktes P, welche nun in der Form

$$\sigma \equiv \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \ldots + \sigma_n x_n + \sigma_{n+1} = 0 \qquad 31)$$

geschrieben werden mag. Also hat man:

Die n Koordinaten x_i des im R_n einen gegebenen Raum R_{n-1} beschreibenden Punktes P hängen mit einander zusammen mittels einer linearen, d. h. im allgemeinen nicht homogenen Gleichung ersten Grades.

Von diesem allgemeinen Gesetze sind uns früher — vergleiche die Interpretation der Gleichungen 24), 27) und 29) — schon besondere Fälle begegnet.

Digitized by Google

Läfst man alle Koordinaten bis auf eine verschwinden, so stellt 31) die Spuren des Raumes R_{n-1} in Bezug auf die Achsen dar. Es sind diese durch R_{n-1} von den Achsen abgeschnittenen Stücke der Reihe nach $-\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_i}, (i=1, 2, \ldots n)$. Läfst man alle Koordinaten bis auf zwei verschwinden, so erhält man aus 31) die Spurgeraden von R_{n-1} mit den Projektionsebenen, u. s. w.

Durch Einführung der Segmente $a_i = -\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_i}, (i=1, 2, \ldots n)$, welche der Raum R_{n-1} von den Achsen abschneidet, nimmt 31) die Form

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \qquad 32)$$

an, welche als *Achsengleichung* von R_{n-1} bezeichnet werden kann. Mit ihrer Hilfe beweist man leicht, dafs umgekehrt jede lineare Gleichung 31) einen Raum R_{n-1} darstellt. Ist nämlich σ_{n+1} von Null verschieden, so kann man die Gleichung auf die Form 32) bringen und nun betonen, dafs der Raum, welcher die Segmente a_i auf den Achsen bestimmt, der gegebenen Gleichung entspricht. Und ist σ_{n+1} in der gegebenen Gleichung Null, so kann man von der mit irgend einem Werte von σ_{n+1} ergänzten Gleichung ausgehen und nachher zeigen, dafs Verringerung dieses Wertes bis auf Null eine parallele Verschiebung des gefundenen Raumes, bis er den Ursprung enthält, bedeutet.

Aufgabe 168. Beweise mit Hilfe der Formel 12), dafs die Gleichung des Ortes des im R_n von zwei gegebenen Punkten Q_1, Q_2 gleich weit entfernten Punktes P, — d. h. die Gleichung des Raumes R_{n-1}, welcher die Strecke $Q_1 Q_2$ senkrecht halbiert, — linear ist.

Aufgabe 169. Beweise mittels Koordinatentransformation, dafs die Gleichung eines Raumes R_{n-1} linear ist.

Aufgabe 170. Wie beweist man mittels Koordinatentransformation, dafs umgekehrt jede lineare Gleichung zwischen den n Koordinaten einen Raum R_{n-1} darstellt?

77. **Die Hesse'sche Normalform des Raumes R_{n-1}.** Ist ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ mit den Winkeln $X_i O X_k = \lambda_{i,k}$ gegeben,

Digitized by Google

so kann man die Lage irgend eines Raumes R_{n-1} in Bezug auf dieses System mittels des aus dem Ursprunge O auf den R_{n-1} gefällten Lotes OO' bestimmen. Also mufs man zur Gleichung des Raumes R_{n-1} aufsteigen können, sobald die Länge p des Lotes OO' und die von dieser Gerade mit den Achsen gebildeten Winkel α_i, welche der Bedingung 14) Genüge leisten sollen, bekannt sind. Dies ist wirklich der Fall. Ist nämlich P irgend ein ganz willkürlicher Punkt, sind x_i die Koordinaten dieses Punktes, und hat das aus diesem Punkte auf R_{n-1} gefällte Lot die Länge l, so ergiebt sich, wenn man den Koordinatenweg dieses Punktes auf das Lot OO' projiziert, unmittelbar

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \ldots + x_n \cos\alpha_n = p \pm l, \qquad 33)$$

wo rechts das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem O und P auf verschiedenen Seiten oder auf der nämlichen Seite von R_{n-1} liegen. Hieraus folgt

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \ldots + x_n \cos\alpha_n - p = 0 \qquad 34)$$

für alle Punkte P in R_{n-1}; d. h. die Koordinaten aller Punkte dieses Raumes befriedigen die letzte Gleichung.

Aufgabe 171. Leite die Gleichung 34) her mittels Berechnung der Segmente a_i, welche R_{n-1} von den Achsen abschneidet.

[Man hat $a_i \cos\alpha_i = p$, u. s. w.]

Allein, die Gleichung 33) lehrt noch mehr. Sie giebt

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \ldots + x_n \cos\alpha_n - p = \pm l, \qquad 35)$$

d. h. man hat den Satz:

Für den in der angegebenen Weise durch die Gröfsen p und α_i, $(i = 1, 2, \ldots n)$ bestimmten Raum R_{n-1} bedeutet die Form

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \ldots + x_n \cos\alpha_n - p \qquad 36)$$

die Länge des aus dem Punkte P mit den Koordinaten x_i, $(i = 1, 2 \ldots n)$ auf R_{n-1} gefällten Lotes, mit dem richtigen oder mit dem unrichtigen Vorzeichen, je nachdem O und P durch R_{n-1} getrennt werden oder nicht.

Also heifst obige von Hesse in die Geometrie eingeführte Form die Normalform der Gleichung des Raumes R_{n-1} oder kürzer die *Normalform* des Raumes R_{n-1}.

Digitized by Google

Es ist ein Leichtes, die willkürliche Gleichung 31) von R_{n-1} auf die Normalform zu bringen. Dazu hat man sie mit einem Faktor f zu multiplizieren, welcher die Koeffizienten $f\sigma_i$ der Koordinaten x_i zu Gröfsen $\cos\alpha_i$ umbildet; d. h. wird das erste Glied von 14) mit Δ_α, das Substitutionsresultat von σ_i für $\cos\alpha_i$ in Δ_α mit Δ_σ und der dabei ungeändert gebliebene Minor vom Grade n mit Δ bezeichnet, so mufs 31) multipliziert werden mit dem durch die Gleichung

$$f^2(\Delta_\sigma - \Delta) + \Delta = 0$$

bestimmten Faktor f.

Für ein rechtwinkliges Achsensystem hat f den Wert

$$f = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}}.$$

Aufgabe 172. Bringe die auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogene Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 24x_{24} = 70$$

eines Raumes R_{23} in R_{24} auf die Normalform.

[Man findet $f = \frac{1}{70}$ und also $\frac{1}{70}\sum_1^{24} i x_i = 1$.]

78. **Lineare Kombination von Räumen R_{n-1}.** Sind $n-d$ Gleichungen

$$\sigma^{(1)} = 0, \sigma^{(2)} = 0, \ldots, \sigma^{(n-d)} = 0 \qquad 37)$$

von der Form 31) gegeben und betrachtet man nur diejenigen Punkte, deren Koordinaten x_i zu gleicher Zeit diese $n-d$ Gleichungen befriedigen, so hat man es offenbar mit dem Raume R_d zu thun, welcher den durch diese Gleichungen dargestellten Räumen R_{n-1} gemeinsam ist. Wirklich leitet man dann auch aus den $n-d$ gegebenen Gleichungen mittels Auflösung nach $x_1, x_2, \ldots x_{n-d}$ die Gleichungen 29) ab.

Man kann aber die $n-d$ gegebenen Gleichungen auch linear kombinieren, indem man jede Gleichung $\sigma^{(i)} = 0$ mit einem ihr zugeordneten Faktor k_i multipliziert und sie nachher alle zu einander addiert. So erhält man die Gleichung

$$k_1\sigma^{(1)} + k_2\sigma^{(2)} + \ldots + k_{n-d}\sigma^{(n-d)} = 0, \qquad 38)$$

welche, wenn die $n-d$ Faktoren k_i alle möglichen Werte annehmen, alle Räume R_{n-1} darstellt, denen der durch die

Digitized by Google

Gleichungen 37) bestimmte Raum R_d gemeinsam ist. Man nennt eine solche Reihe von Räumen R_{n-1} im allgemeinen ein *lineares System* $n - d - 1^{\text{ster}}$ Stufe; der durch die Gleichungen 37) bestimmte Raum R_d heifst der *Basisraum* des Systems. Im nächsten Paragraphen(100) werden wir für diese Systeme einen anderen Namen vorschlagen.

In dem einfachen Falle von zwei gegebenen Räumen $\sigma = 0$ und $\sigma' = 0$ spricht man von einem *Büschel* von Räumen R_{n-1}. Sind insbesondere die Räume $\sigma = 0, \sigma' = 0$ einander parallel, d. h. hat man zwischen den Koeffizienten σ_i, σ_i' die Beziehungen

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} = \ldots = \frac{\sigma_n'}{\sigma_n} \neq \frac{\sigma_{n+1}'}{\sigma_{n+1}},$$

so findet man, dafs zwischen den Koeffizienten σ_i und $\sigma_i'' \equiv k\sigma_i + k'\sigma_i'$ die nämlichen Beziehungen obwalten, also alle Räume $\sigma'' \equiv k\sigma + k'\sigma' = 0$ — was geometrisch evident ist — den Räumen $\sigma = 0, \sigma' = 0$ parallel sind. Wird das Verhältnis $\frac{k'}{k}$ nun so gewählt, dafs sämtliche Koeffizienten σ_i'' mit Ausnahme von σ_{n+1}'' verschwinden, so erhält man in der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n + 1 = 0,$$

welche einen unendlich grofse Segmente a_i von den Achsen abschneidenden Raum darstellt, offenbar das analytische Gegenstück des Raumes $\bar{U}_n$ von R_n, welcher jedem Büschel von parallelen Räumen R_{n-1} angehört. Von solchen Büscheln liegt der Basisraum unendlich fern.

Aufgabe 173. Beweise allgemein, dafs das Verhältnis $\frac{k'}{k}$, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, dem konstanten Verhältnisse $\frac{l}{l'}$ der aus irgend einem Punkte P von σ'' auf σ und σ' gefällten Lote l und l' gleich ist, wenn die Gleichungen $\sigma = 0, \sigma' = 0$ vorher auf die Normalform gebracht worden sind.

Aufgabe 174. Berechne das Verhältnis $\frac{l}{l'}$, wenn die in $\sigma'' \equiv k\sigma + k'\sigma' = 0$ auftretenden Formen σ, σ' willkürlich gegeben sind.

Digitized by Google

[Man bringe nach Nr. 77 die Gleichungen $\sigma = 0, \sigma' = 0$ auf die Normalform.]

In dem nächstfolgenden Falle von drei gegebenen Räumen $\sigma = 0, \sigma' = 0, \sigma'' = 0$ spricht man von einem *Bündel* oder *Netz* von Räumen, u. s. w.

79. **Homogene Koordinaten.** Hat man im R_n irgend ein Simplex $S(n+1)$ angenommen, so kann man die aus irgend einem Punkte P auf die $n+1$ Seitenräume R_{n-1} dieses $S(n+1)$ gefällten Lote als eine Art Koordinaten von P betrachten. Allerdings mufs man sich dann zur Vermeidung von Zweideutigkeit sofort über das Vorzeichen dieser Lote einigen, was dadurch geschehen kann, dafs man das Lot l_i aus P auf den dem Eckpunkte $P^{(i)}$ gegenüberliegenden Seitenraum $R_{n-1}^{(i)}$ von $S(n+1)$ positiv oder negativ rechnet, je nachdem P und $P^{(i)}$ auf der nämlichen Seite von $R_{n-1}^{(i)}$ liegen oder nicht. Nach dieser Verabredung kann dann weiter behauptet werden, dafs schon n von den $n+1$ Loten l_i den entsprechenden Punkt P bestimmen. Sind nämlich c_i irgend welche konstante Gröfsen, so giebt jede Gleichung $l_i = c_i$ die Bedingung dafür an, dafs der entsprechende Punkt P in einem bestimmten zu $R_{n-1}^{(i)}$ parallelen Raume R_{n-1} liegen soll; also bestimmen n von den Gleichungen $l_1 = c_1, l_2 = c_2, \ldots l_{n+1} = c_{n+1}$ einen Punkt. Wir beweisen nun zunächst, dafs man den Punkt P finden kann, sobald die Verhältnisse der $n+1$ Lote l_i gegeben sind, und nachher, dafs man aus diesen Verhältnissen zu den absoluten Werten dieser Lote aufsteigen kann, sobald die Abstände h_i der Eckpunkte $P^{(i)}$ von den gegenüberliegenden Seitenräumen $R_{n-1}^{(i)}$ gegeben sind.

Ist das Verhältnis $\frac{l_i}{l_{n+1}}$ bekannt, so liegt der entsprechende Punkt P in einem bestimmten Raume R_{n-1} durch den Schnittraum $R_{n-2}^{(i,n+1)}$ von $R_{n-1}^{(i)}$ und $R_{n-1}^{(n+1)}$. Also ist P bekannt sobald die n Verhältnisse $\frac{l_i}{l_{n+1}}$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ gegeben sind; denn P ist dann der einzige Schnittpunkt von n bestimmten Räumen R_{n-1}, welche $R_{n-1}^{(n+1)}$ in den n nicht durch einen nämlichen Punkt gehenden Räumen $R_{n-2}^{(i,n+1)}$,

Digitized by Google

$(i = 1, 2, \ldots n)$ schneiden. Und diese Bemerkung reicht immer hin zum Beweise der ersten der beiden obigen Behauptungen; denn, weil höchstens n der $n+1$ Lote l verschwinden, so bleibt immer mindestens ein von Null verschiedenes Lot übrig, welches als gemeinschaftlicher Nenner der n Verhältnisse angenommen werden kann.

Aufgabe 175. Wie weifs man, dafs die n Räume $R_{n-2}^{(i,\,n+1)}$ keinen Punkt gemein haben?

[Diese Räume schliefsen offenbar ein $S(n)$ im $R_{n-1}^{(n+1)}$ ein.]

Wir zeigen nun weiter, dafs zwischen den $n+1$ Loten l_i und den $n+1$ Höhen h_i die Beziehung

$$\frac{l_1}{h_1} + \frac{l_2}{h_2} + \ldots + \frac{l_{n+1}}{h_{n+1}} = 1 \qquad 39)$$

obwaltet. Dazu wenden wir wieder die Schlufsweise von n auf $n+1$ an und setzen also vorläufig voraus für irgend einen Punkt Q von $R_{n-1}^{(n+1)}$ gelte die Beziehung $\sum_1^n \frac{l_i'}{h_i'} = 1$, wo l_i' die Lote aus Q auf die Seitenräume $R_{n-2}^{(i,\,n+1)}$ vom $S(n)$ in $R_{n-1}^{(n+1)}$, h_i' die Höhen dieses $S(n)$ bezeichnen. Für jeden Punkt Q von $R_{n-1}^{(n+1)}$ mit den auf $R_{n-1}^{(i)}$ gefällten Loten $l_i^{(q)}$ gelten aber auch die Proportionen $\frac{l_i'}{l_i^{(q)}} = \frac{h_i'}{h_i}$, oder $\frac{l_i'}{h_i'} = \frac{l_i^{(q)}}{h_i}$; d. h. für jeden Punkt Q von $R_{n-1}^{(n+1)}$ hat man $\sum_1^n \frac{l_i^{(q)}}{h_i} = 1$ und also in Verbindung mit $l_{n+1}^{(q)} = 0$ auch die zu beweisende Beziehung. Allein, dann gilt diese Beziehung 39) auch allgemein. Denn, wenn dem Punkte P der Verbindungslinie $P^{(n+1)}Q$ die Lote $l_i^{(p)}$ zukommen, so hat man

$$\frac{l_i^{(p)}}{l_i^{(q)}} = \frac{h_{n+1} - l_{n+1}^{(p)}}{h_{n+1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wodurch $\sum_1^n \frac{l_i^{(q)}}{h_i} = 1$ übergeht in $\sum_1^n \frac{l_i^{(p)}}{h_i} = 1 - \frac{l_{n+1}^{(p)}}{h_{n+1}}$, d. h. in 39).

Digitized by Google

[Einfacher wird 39) aus Inhaltsbetrachtungen abgeleitet; wir kommen im zweiten Teile auf diesen Punkt zurück.]

Wie nun unmittelbar einleuchtet, ermöglicht die Bedingung 39), von den Verhältnissen der Lote l_i zu ihren absoluten Werten aufzusteigen. Ist nämlich bekannt, dafs die aus irgend einem Punkte P gefällten Lote l_i sich wie die gegebenen Gröfsen λ_i verhalten, so ergiebt die Substitution $f\lambda_i$ für l_i in 39) unmittelbar den Wert des Faktors f, u. s. w.

Aus diesen Überlegungen geht zur Genüge hervor, dafs man irgend ein System von $n+1$ mit den l_i proportionalen Gröfsen λ als Verhältniskoordinaten des entsprechenden Punktes P betrachten kann. Allein, wenn man die allgemeinsten als homogen bezeichneten Koordinaten aufdecken will, so mufs man noch einen Schritt weiter gehen. Deutet man mit ϱ_i, $(i = 1, 2, \ldots n+1)$ ein System von $n+1$ willkürlich gegebenen Konstanten und mit ϱ irgend eine unbestimmte Gröfse an, so versteht man unter den allgemeinsten homogenen Koordinaten eines Punktes P mit den $n+1$ Loten l_i irgend ein System von $n+1$ Gröfsen t_i, welches den Gleichungen

$$\varrho t_i = \varrho_i l_i, \ (i = 1, 2, \ldots n+1) \qquad 40)$$

Genüge leistet. Die Hinzufügung des unbestimmten Faktors ϱ beweist dann wieder, dafs es sich auch nach der letzten Verallgemeinerung immer noch lediglich um die Verhältnisse dieser Koordinaten, niemals um ihre absoluten Werte handelt. Und deshalb nennt man sie homogene Koordinaten, weil ihr Charakter als Verhältnisgröfsen ihren Gebrauch auf homogene Gleichungen beschränkt.

80. **Die homogene Gleichung des Raumes R_{n-1}.** Wir beweisen nun folgenden Satz:

Alle Punkte P, deren homogene Koordinaten t_i eine homogene Gleichung ersten Grades befriedigen, liegen in einem Raume R_{n-1}.

Sind die $n+1$ Seitenräume $R^{(i)}_{n-1}$ des $S(n+1)$ auf irgend ein gegebenes Parallelkoordinatensystem bezogen mittels der auf die Normalform gebrachten Gleichungen

$$l_i \equiv x_1 \cos \alpha_1^{(i)} + x_2 \cos \alpha_2^{(i)} + \ldots + x_n \cos \alpha_n^{(i)} - p^{(i)} = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots n+1)$$

Digitized by Google

so geht die gegebene homogene Gleichung $\sum_{1}^{n+1} \tau_i t_i = 0$ mit Hilfe von 40) über in $\sum_{1}^{n+1} \tau_i \varrho_i l_i = 0$. Also giebt Einführung der Werte der l_i unmittelbar

$$x_1 \sum_{1}^{n+1} \tau_i \varrho_i \cos \alpha_1^{(i)} + x_2 \sum_{1}^{n+1} \tau_i \varrho_i \cos \alpha_2^{(i)} + \ldots$$
$$+ x_n \sum_{1}^{n+1} \tau_i \varrho_i \cos \alpha_n^{(i)} - \sum_{1}^{n+1} \tau_i \varrho_i p^{(i)} = 0,$$

d. h. zwischen den schiefwinkligen Parallelkoordinaten $x_i\,(i = 1, 2, \ldots n)$ der Punkte des Ortes besteht eine nicht homogene Gleichung ersten Grades; und hiermit ist der erwähnte Satz bewiesen.

Der Punkt, dessen $n+1$ Koordinaten t_i einander gleich sind, wird der *Einheitspunkt* des homogenen Koordinatensystems genannt. Zur Bestimmung dieses Koordinatensystems kann man dem $S(n+1)$ also entweder ein gegebenes System von Konstanten ϱ_i oder einen beliebig gewählten Einheitspunkt zur Seite stellen; denn, ist $S(n+1)$ einmal angenommen, so bestimmt der Einheitspunkt die Verhältnisse der Gröfsen ϱ_i, wie umgekehrt das System der Werte ϱ_i den Einheitspunkt.

Aufgabe 176. Weshalb darf der Einheitspunkt nicht in einem der $n+1$ Räume R_{n-1} des Koordinatensimplex $S(n+1)$ angenommen werden?

Von den verschiedenen homogenen Koordinatensystemen ragen zwei besonders hervor, das System der normalen Abstandskoordinaten und das System der barycentrischen Koordinaten. In dem ersteren der beiden Systeme sind alle ϱ_i einander gleich und ist der Punkt innerhalb $S(n+1)$, welcher von allen $n+1$ Seitenräumen $R_{n-1}^{(i)}$ gleich weit entfernt ist, Einheitspunkt; in dem zweiten sind die Koeffizienten ϱ_i den Höhen h_i umgekehrt proportional und ist der Punkt mit gleichwertigen Gröfsen $\frac{l_i}{h_i}$ Einheitspunkt. Letzteres schon von Moebius herrührende System entlehnt seinen Namen der Thatsache, dafs es mit Schwerpunktsbetrachtungen eng verknüpft ist. Denkt man sich in den

Digitized by Google

Eckpunkten $P^{(i)}$ vom $S(n+1)$ die Massen λ_i und wendet man rücksichtlich des Seitenraumes $R_{n-1}^{(i)}$ den durch 30) gegebenen Momentensatz an, so findet man unmittelbar

$$l_i = \frac{\lambda_i h_i}{\Sigma\lambda}, \ (i = 1, 2, \ldots n+1),$$

d. h. die sich auf den Schwerpunkt dieser Massen beziehenden Gröfsen $\frac{l_i}{h_i}$ sind den Massen λ_i proportional. Also:

Ist P der Schwerpunkt der in den Eckpunkten $P^{(i)}$ des $S(n+1)$ gedachten Massen λ_i, so sind die barycentrischen Koordinaten $\varrho\frac{l_i}{h_i}$ von P diesen Massen λ_i proportional. Der Einheitspunkt dieser Koordinaten ist also der Schwerpunkt gleicher Massen λ.

Betrachtet man die Gröfsen $\frac{l_i}{h_i}$ als die *absoluten* Werte $\bar{l}_i$ dieser Verhältniskoordinaten, so giebt 39) die Beziehung

$$\sum_1^{n+1} \bar{l}_i = 1. \qquad 41)$$

81. **Raumkoordinaten.** Fafst man die verschiedenen Formen $\sum_1^n \sigma_i x_i + \sigma_{n+1} = 0$, $\sum_1^n \frac{x_i}{a_i} = 1$, $\sum_1^n x_i \cos\alpha_i - p = 0$ der Gleichung des Raumes R_{n-1} in parallelen Koordinaten zusammen in

$$\sum_1^n \xi_i x_i + 1 = 0, \qquad 42)$$

so bilden in dieser Gleichung die speziellen Werte der n Koeffizienten ξ_i dasjenige, was den entsprechenden Raum R_{n-1} von anderen Räumen R_{n-1} unterscheidet. Man kann diese n Gröfsen ξ_i deshalb die bestimmenden Gröfsen dieses Raumes, oder die Parameter dieses Raumes, oder aber die *Raumkoordinaten* dieses Raumes nennen. Die Gleichung 42) ist dann die Bedingung, welche aussagt, dafs der Punkt mit den Punktkoordinaten x_i in dem Raume R_{n-1} mit den Raumkoordinaten ξ_i liegt; sie drückt, wie man sagt, die vereinigte Lage des Punktes x_i mit dem Raume ξ_i von $n-1$ Dimensionen aus. Und hieraus geht dann hervor, dafs alle

Digitized by Google

Räume R_{n-1}, welche den bestimmten Punkt P mit den Punktkoordinaten c_i enthalten, Raumkoordinaten ξ_i haben, welche der Bedingung

$$\sum_1^n c_i \xi_i + 1 = 0 \qquad 43)$$

Genüge leisten; d. h. die Gleichung 43) ist die Raumkoordinatengleichung des Punktes P mit den Punktkoordinaten c_i.

Wir bemerken sofort, dafs Vergleichung der Gleichungen 32) und 42) auf einen engen Zusammenhang zwischen den vom Raume R_{n-1} von den Achsen abgeschnittenen Segmenten a_i und den neuen Koordinaten ξ_i dieses Raumes hinweist; es ist nämlich immer $\xi_i = -\frac{1}{a_i}$, d. h. die Raumkoordinaten eines Raumes R_{n-1} sind die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen reziproken Achsenabschnitte dieses Raumes.

Schreibt man die Gleichung $k_1 \sigma^{(1)} + k_2 \sigma^{(2)} = 0$ eines Büschels von Räumen R_{n-1} in Übereinstimmung mit 42 der Form

$$k_1 \left[\sum_1^n \xi_i^{(1)} x_i + 1\right] + k_2 \left[\sum_1^n \xi_i^{(2)} x_i + 1\right] = 0,$$

welche nach Division durch $k_1 + k_2$ übergeht in

$$\sum_1^n \frac{k_1 \xi_i^{(1)} + k_2 \xi_i^{(2)}}{k_1 + k_2} x_i + 1 = 0,$$

so findet man unmittelbar, dafs die Raumkoordinaten ξ_i der einfach unendlichen Anzahl von Räumen R_{n-1} durch einen R_{n-2} durch die Formeln

$$\xi_i = \frac{k_1 \xi_i^{(1)} + k_2 \xi_i^{(2)}}{k_1 + k_2}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 44)$$

dargestellt werden. Diese Formeln lösen den Basisraum R_{n-2} des Büschels in die durch ihn gehenden Räume R_{n-1} auf. Mittels Elimination von $\frac{k_1}{k_2}$ ergeben sich dann weiter die $n-1$ Gleichungen

$$\xi_1 = \beta_1 \xi_n + \gamma_1, \xi_2 = \beta_2 \xi_n + \gamma_2, \ldots \xi_{n-1} = \beta_{n-1} \xi_n + \gamma_{n-1}, \quad 45)$$

Digitized by Google

welche den Gleichungen 24) nachgebildet sind; sie stellen die Punkte dar, in denen der Basisraum R_{n-2} die Ebenen $O(X_1X_n)$, $O(X_2X_n)$, ... $O(X_{n-1}X_n)$ schneidet; denn die erste dieser Gleichungen entspricht einem Punkte dieses R_{n-2}, welcher nach 43) die Koordinaten $\left(-\frac{1}{\gamma_1}, 0, 0, \ldots 0, \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)$ hat, u. s. w.

Auf die nämliche Weise bildet man die Gleichung $\sum_1^{d+1} k_i \sigma^{(i)} = 0$ aller Räume R_{n-1} durch einen gegebenen Raum R_{n-d-1} in die Formeln:

$$\xi_i = \frac{k_1 \xi_i^{(1)} + k_2 \xi_i^{(2)} + \ldots + k_{d+1} \xi_i^{(d+1)}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_{d+1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 46)$$

um, und erhält man mittels Elimination der Verhältnisse von $k_1, k_2, \ldots k_{d+1}$:

$$\xi_i = \alpha_i \xi_{n-d+1} + \beta_i \xi_{n-d+2} + \ldots + \varrho_i \xi_n + \sigma_i. \qquad 47)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n - d)$$

So weitergehend findet man schliefslich, dafs die Raumkoordinaten aller Räume R_{n-1} durch einen Punkt auf die Form:

$$\xi_i = \frac{k_1 \xi_i^{(1)} + k_2 \xi_i^{(2)} + \ldots + k_n \xi_i^{(n)}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 48)$$

gebracht werden können und hieraus durch Elimination der Gröfsen k_i die Gleichung 43) dieses Punktes hervorgeht.

Aufgabe 177. Zwei Räume $R_{n-1}^{(1)}$, $R_{n-1}^{(2)}$ mit den Koordinaten $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ sind gegeben. Man fragt nach den Koordinaten $\xi_i^{(3)}$ des Raumes $R_{n-1}^{(3)}$ durch den Schnittraum R_{n-2} von $R_{n-1}^{(1)}$ und $R_{n-1}^{(2)}$ und den Ursprung, sowie die Koordinaten $\xi_i^{(4)}$ des durch $R_{n-1}^{(1)}$ und $R_{n-1}^{(2)}$ harmonisch von $R_{n-1}^{(3)}$ getrennten Raumes $R_{n-1}^{(4)}$.

[Man findet $\xi_i^{(3)} = \varrho(\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)})$, wo ϱ unendlich ist, und weiter $\xi_i^{(4)} = \frac{1}{2}(\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)})$.]

82. **Homogene Raumkoordinaten.** Die bisher benutzten mit einem Systeme paralleler Punktkoordinaten x_i

Digitized by Google

in Verbindung stehenden Raumkoordinaten ξ_i sind wie jene absolute, d. h. keine Verhältniskoordinaten. Wir wenden uns jetzt zu den homogenen Raumkoordinaten, welche mit den homogenen Punktkoordinaten t_i in Verbindung stehen.

Ist $\sum_1^{n+1} \tau_i t_i = 0$ in Bezug auf ein durch Simplex und Einheitspunkt bestimmtes System von homogenen Punktkoordinaten t_i die Gleichung irgend eines Raumes R_{n-1}, so können die Koeffizienten τ_i, $(i = 1, 2, \ldots n+1)$ als die homogenen Raumkoordinaten dieses Raumes R_{n-1} betrachtet werden. Für diese neuen Verhältniskoordinaten wiederholen sich dann fast ungeändert die obigen Entwickelungen, weshalb wir uns bei der Erwähnung dieser Ergebnisse hauptsächlich auf die Unterschiede beschränken.

Sind die Koordinaten τ_i eines Raumes R_{n-1} der Bedingung

$$\sum_1^{n+1} \tau_i \alpha_i = 0 \qquad 49)$$

unterworfen, so geht der Raum R_{n-1} durch den Punkt A mit den homogenen Punktkoordinaten α_i; d. h. es ist 49) die Gleichung des Punktes A in homogenen Raumkoordinaten τ_i.

Geht man mit Hilfe der Formel 40) von den homogenen Punktkoordinaten t_i zu den Loten l_i zurück, so stößt man leicht auf eine einfache geometrische Bedeutung der homogenen Raumkoordinaten τ_i des gegebenen Raumes $R_{n-1}^{(\tau)}$. Stehen die durch die Kante $P^{(1)}P^{(2)}$ vom $S(n+1)$ gehenden Ebenen $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, α^{τ} (Fig. 56) in den Geraden q_1, q_2, q senk-

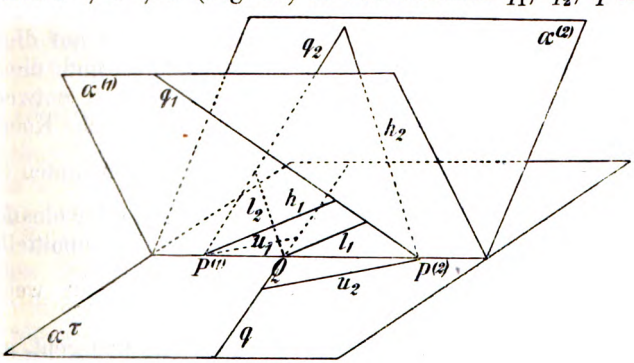


Fig. 56.

Digitized by Google

recht auf $R_{n-1}^{(1)}$, $R_{n-1}^{(2)}$, $R_{n-1}^{(\tau)}$, und sind u_1, u_2 die aus $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ auf $R_{n-1}^{(\tau)}$ gefällten Lote, so hat man, wenn man auf das Vorzeichen achtet,

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{P^{(1)}Q}{P^{(2)}Q}, \quad \frac{l_1}{h_1} = \frac{P^{(2)}Q}{P^{(2)}P^{(1)}}, \quad \frac{l_2}{h_2} = \frac{P^{(1)}Q}{P^{(1)}P^{(2)}}$$

und also auch

$$\frac{h_1 u_2}{h_2 u_1} = -\frac{l_1}{l_2}.$$

Für den Schnittpunkt Q von $P^{(1)}P^{(2)}$ mit $R_{n-1}^{(\tau)}$ giebt die Gleichung $\sum_1^{n+1} \tau_i \varrho_i l_i = 0$, weil $l_3, l_4, \ldots l_{n+1}$ für Q verschwinden,

$$\frac{\tau_1 \varrho_1}{\tau_2 \varrho_2} = -\frac{l_2}{l_1}.$$

Deshalb giebt Multiplikation der letzten zwei Beziehungen

$$\frac{\tau_1 \varrho_1 h_1 u_2}{\tau_2 \varrho_2 h_2 u_1} = 1,$$

oder allgemein

$$\tau_i = \tau \frac{u_i}{\varrho_i h_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots n+1),$$

wo τ irgend ein unbestimmter Proportionalitätsfaktor ist. Man findet also, dafs die homogenen Raumkoordinaten τ_i eines Raumes R_{n-1} den mit gewissen Konstanten multiplizierten aus den Eckpunkten $P^{(i)}$ vom $S(n+1)$ auf diesen R_{n-1} gefällten Loten u_i proportional sind. Sind die zu Grunde gelegten homogenen Punktkoordinaten t_i entweder normale Abstandskoordinaten l_i oder barycentrische Koordinaten $\frac{l_i}{h_i}$, so sind diese u_i multiplizierenden Konstanten entweder mit den Höhen h_i verkehrt proportional oder einander gleich. Der letztere Teil dieses Resultates ist unmittelbar einleuchtend; denn die Gleichung $\sum_1^{n+1} u_i t_i = 0$, in welche $\sum_1^{n+1} \tau_i t_i = 0$ für barycentrische Koordinaten übergeht, sagt

Digitized by Google

aus, daſs die Summe der Momente der in den Eckpunkten $P^{(i)}$ gedachten Massen t_i in Bezug auf irgend einen Raum R_{n-1} durch den Schwerpunkt dieser Massen mit den barycentrischen Koordinaten t_i — vergleiche den Satz am Schlusse der Nr. 80 — verschwindet, und dies muſs ja der Fall sein, weil das Moment der resultierenden Masse $\sum_1^{n+1} t_i$ Null ist.

Beim Raumkoordinatensysteme kann man den Raum R_{n-1} mit gleichen Raumkoordinaten den *Einheitsraum* nennen; im letzteren der beiden erwähnten besonderen Fälle ist dieser Raum ein uneigentlicher Raum.

Wir übergehen weiter die Entwickelungen über die homogenen Raumkoordinatengleichungen von Schar, Gewebe und anderen dergleichen linearen Systemen, weil sie zu keinen neuen Bemerkungen führen; nur stellen wir in Aussicht, nachher(100) auf diesen Punkt zurückzukommen.

83. **Zusammenhang zwischen homogenen und nicht-homogenen Koordinaten.** Wendet man auf die Gleichung

$$\sigma \equiv \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \ldots + \sigma_n x_n + \sigma_{n+1} = 0$$

des Raumes R_{n-1} in schiefwinkligen Parallelkoordinaten die Substitutionen

$$x_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

an, so geht die nicht-homogene Gleichung in die homogene Form

$$\sigma' \equiv \sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2 + \ldots + \sigma_n y_n + \sigma_{n+1} y_{n+1} = 0 \quad 50)$$

über, welche thatsächlich nicht verschieden ist von der oben verwendeten mit einem Simplex $S(n+1)$ zusammenhängenden Gleichungsform $\sum_1^{n+1} \tau_i t_i = 0$. Und von dieser neuen Gleichungsform 50) kehrt man unmittelbar zur ursprünglichen Form $\sigma = 0$ zurück, indem man y_{n+1} durch die Einheit ersetzt. Also kann man auch bei Parallelkoordinaten von einem dem Systeme zu Grunde liegenden Simplex $S(n+1)$ reden, dessen Seitenräume den n Gleichungen $x_i = 0$ und der Gleichung $1 = 0$ entsprechen und also von den n Koordinatenräumen R_{n-1} und dem uneigentlichen Raume $\bar{U}_n$ von R_n gebildet werden; die Eckpunkte dieses Simplex sind des-

Digitized by Google

halb die uneigentlichen Punkte der Achsen OX_i und der Ursprung.

84. **Transformation von homogenen Koordinaten.** Wir denken uns zum Zwecke der Herleitung des die allgemeinste Transformation verwirklichenden Gleichungssystems die zwei Simplexe $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ der alten und neuen Koordinaten mittels der Gleichungsgruppen

$$\left.\begin{aligned} \varrho l_i &\equiv x_1 \cos\alpha_1^{(i)} + x_2 \cos\alpha_2^{(i)} + \ldots + x_n \cos\alpha_n^{(i)} - p^{(i)} = 0 \\ \varrho' l_i' &\equiv x_1 \cos\beta_1^{(i)} + x_2 \cos\beta_2^{(i)} + \ldots + x_n \cos\beta_n^{(i)} - q^{(i)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 51)$$

der Seitenräume mit irgend einem gegebenen Parallelkoordinatensystem in Verbindung gesetzt. Sollen die alten und neuen homogenen Abstandskoordinaten l_i, l_i' den *nämlichen* Punkt darstellen, so sind die n Koordinaten x_i des ersten der beiden Systeme 51) von $n+1$ Gleichungen jenen des zweiten gleich zu nehmen. Ersetzen wir in beiden Systemen x_i durch $\frac{x_i'}{x_{n+1}'}$, so giebt Elimination der Verhältnisse der $n+2$ Gröfsen $x_1', x_2', \ldots x_{n+1}', \varrho x_{n+1}'$ aus den $n+1$ Gleichungen des ersten Systems und irgend einer Gleichung des zweiten, wenn nachher $\varrho' x_{n+1}'$ durch σ ersetzt wird, $n+1$ Gleichungen

$$\sigma l_i' = a_{1,i} l_1 + a_{2,i} l_2 + \ldots + a_{n+1,i} l_{n+1},$$

welche die neuen Koordinaten l_i' in den alten ausdrücken. Und gehen wir nun von normalen Abstandskoordinaten zu den allgemeinsten homogenen Koordinaten über, so bleibt doch der lineare Charakter dieser Beziehungen erhalten. Deshalb hat man mit anderen Koeffizienten

$$\sigma t_i' = b_{1,i} t_1 + b_{2,i} t_2 + \ldots + b_{n+1,i} t_{n+1}. \quad 52)$$

Man hat also den Satz:

Dem Übergange von einem homogenen Koordinatensystem zu einem andern entspricht die allgemeinste lineare und homogene Transformation zwischen den beiden Systemen von Variabeln t_i und t_i'.

Dieses einfache Resultat war natürlich vorauszusehen. Denn nur unter dem Einflufs der Beziehungen 52) geht irgend eine lineare und homogene Gleichung $\sum_1^{n+1} \tau_i' t_i' = 0$ allemal

Digitized by Google

wieder in eine lineare und homogene Gleichung $\sum_1^{n+1} \tau_i t_i = 0$ über, was doch offenbar geschehen mufs, da dem durch die erste Gleichung dargestellten Raume eine lineare und homogene Gleichung in den t_i entsprechen soll.

Eine geometrische Bedeutung der in den Transformationsgleichungen 52) auftretenden Koeffizienten $b_{i,k}$ wird leicht aufgedeckt; man findet nämlich $\sigma t'_i = b_{i,k} t_k$, wenn man die n Koordinaten t mit von k verschiedenem Index verschwinden läfst, d. h. es sind die Gröfsen $b_{i,k}$, $(i = 1,2,\ldots n+1)$ die neuen Koordinaten des Eckpunktes P_k des Simplex $S(n+1)$, welcher dem Raume R_{n-1} mit der alten Gleichung $t_k = 0$ gegenüberliegt. Und andererseits zeigen die Gleichungen 52) unmittelbar, dafs die Gröfsen $b_{i,k}$, $(k = 1,2,\ldots n+1)$ die alten Raumkoordinaten desjenigen Raumes R_{n-1} des neuen Simplex $S'(n+1)$ sind, welchem die Gleichung $t'_i = 0$ zukommt.

Weil die Seitenräume R_{n-1} des $S'(n+1)$ nicht durch denselben Punkt gehen, so verschwindet die Determinante B der Koeffizienten $b_{i,k}$ nicht. Sind $\beta_{i,k}$ die Minoren dieser Determinante nach den Elementen $b_{i,k}$, so giebt Umkehrung der Formeln 52)

$$\sigma' t_k = \beta_{k,1} t'_1 + \beta_{k,2} t'_2 + \ldots + \beta_{k,n+1} t'_{n+1}. \qquad 53)$$

Aufgabe 178. Welche zweifache geometrische Bedeutung haben die Koeffizienten $\beta_{k,i}$?

Geht die auf das alte Koordinatensystem bezogene Gleichung $\sum_1^{n+1} \tau_k t_k = 0$ eines Raumes R_{n-1} durch Einführung der aus 53) für t_k erhaltenen Werte in $\sum_1^{n+1} \tau'_k t'_k = 0$ über, so hat man $\tau'_k = \sum_{i=1}^{i=n+1} \beta_{i,k} \tau_i$. Deshalb stellen die Gleichungen

$$s \tau'_k = \beta_{1,k} \tau_1 + \beta_{2,k} \tau_2 + \ldots + \beta_{n+1,k} \tau_{n+1} \qquad 54)$$

die allgemeinste Transformation von Raumkoordinaten dar und findet man durch Umkehrung

$$s' \tau_i = b_{i,1} \tau'_1 + b_{i,2} \tau'_2 + \ldots + b_{i,n+1} \tau'_{n+1}. \qquad 55)$$

Aufgabe 179. Führen 54) und 55) wieder zu neuen Bedeutungen der Koeffizienten $\beta_{i,k}$ und $b_{k,i}$?

Digitized by Google

85. **Überzählige Koordinaten.** Sind in einer Ebene vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 gegeben, von welchen nicht drei durch den nämlichen Punkt gehen, so kann man g_1, g_2, g_3 als Seiten $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ des Koordinatendreiecks und g_4 als Einheitsgerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ annehmen. Dabei zeigt es sich dann bekanntlich vorteilhaft, eine neue Koordinate x_4 einzuführen, welche mittels der Beziehung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 zusammenhängt und die analytische Darstellung der Gerade g_4 nun zu $x_4 = 0$ vereinfacht. Es werden dann $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0, x_1 + x_2 = 0$ die Gleichungen der drei Diagonalen des Vierseits $g_1 g_2 g_3 g_4$; denn wegen der identischen Beziehung zwischen den vier x_i können diese Gleichungen auch in der Form $x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0$ geschrieben werden. Man betrachtet x_1, x_2, x_3, x_4 dann als ein homogenes System von überzähligen Koordinaten.

Diese Betrachtung kann durch alle Räume R_n hindurch fortgesetzt werden. Sind nämlich im R_n eine Anzahl von $n+2$ Räumen R_{n-1} gegeben, von welchen nicht $n+1$ durch den nämlichen Punkt gehen, so kann man $n+1$ dieser Räume als Seitenräume $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_{n+1} = 0$ des Koordinatensimplex und den letzten dieser Räume als Einheitsraum $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 0$ annehmen. Einführung einer neuen Gröfse x_{n+2} mit Hilfe der identischen Beziehung $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+2} = 0$ vereinfacht dann die Gleichungen der $n+2$ Räume $R_{n+1}^{(i)}$ zu $x_i = 0$, die Gleichungen der $(n+2)_2$ Räume $R_{n-1}^{(i,k)}$ durch den Schnittraum $R_{n-2}^{(i,k)}$ von $R_{n-1}^{(i)}$ und $R_{n-1}^{(k)}$ und den Schnittpunkt der n übrigen Räume R_{n-1} zu $x_i + x_k = 0$, u. s. w.

Wir werden bald — vergleiche Aufgabe 211 — ein Problem erwähnen, wo diese überzähligen Koordinaten eine einfache Anwendung finden.

86. **Determinanten- und Matrixgleichungen.** Wir stellen den vorhergehenden Betrachtungen noch einige allgemeine Bemerkungen zur Seite, in welchen Determinante und Matrix eine Hauptrolle spielen.

Das Problem, die Gleichung des durch n gegebene Punkte bestimmten Raumes R_{n-1} zu entwickeln, ist in Nr. 76 thatsächlich gelöst worden; allein die Bildung der

Digitized by Google

Gleichung 31) mittels Elimination der Parameter λ_k aus den Gleichungen 30), welche sich dort dem Entwickelungsgange am engsten anschlofs, kann durch ein mehr unmittelbares Verfahren ersetzt werden.

Sind $x_i^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ die Koordinaten der n gegebenen Punkte $P^{(k)}$, so müssen die Koeffizienten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n+1}$ der Gleichung 31) die n Bedingungsgleichungen

$$\sigma_1 x_1^{(k)} + \sigma_2 x_2^{(k)} + \ldots + \sigma_n x_n^{(k)} + \sigma_{n+1} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

befriedigen. Also giebt Elimination der $n+1$ Gröfsen σ aus 31) und diesen Bedingungsgleichungen, in welchen sie homogen enthalten sind, unmittelbar in Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} & 1 \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & x_3^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 56)$$

die gesuchte Gleichung. Und dieses Resultat wird leicht bestätigt. Denn, wie die Entwickelung der Determinante nach den Elementen der ersten Horizontalreihe zeigt, ist die Gleichung linear; aufserdem gehört jeder der n gegebenen Punkte dem durch diese lineare Gleichung bestimmten Raume R_{n-1} an, weil die Voraussetzung $x_i = x_i^{(k)}$, $(i = 1, 2 \ldots n)$ der Determinante zwei gleiche Horizontalreihen erteilt und sie also verschwinden macht, u. s. w.

Aufgabe 180. Suche die Gleichung des Raumes R_3, welcher die vier in R_4 gegebenen Punkte

$$(1, 2, 3, 4), \quad (2, 3, 4, 1), \quad (3, 4, 1, 2), \quad (4, 1, 2, 3)$$

enthält.

[Man findet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = 0$; weshalb war dies vorauszusehen?]

Aufgabe 181. Schreibe die Bedingung hin, dafs $n+1$ im R_n gegebene Punkte in einem R_{n-1} liegen.

[Im zweiten Teile wird gezeigt werden, dafs die hier verschwindende Determinante, wenn die $n+1$ gegebenen

Digitized by Google

Punkte beliebig gewählt sind, mit dem Volumen des durch die Punkte bestimmten $S(n+1)$ in Zusammenhang steht.]

Betrachtet man in der Gleichung 56) nur die Punkte $x_i^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ als gegeben, also die Koordinaten $x_i^{(n)}$ des Punktes $P^{(n)}$ als ganz willkürlich, so stellt diese Gleichung alle Räume R_{n-1} durch den durch die $n-1$ gegebenen Punkte bestimmten Raum R_{n-2}, d. h. ein Büschel von Räumen R_{n-1}, dar. Unter diesen Umständen mufs die Gleichung 56) also in zwei von einander unabhängige Gleichungen zerfallen. Wirklich erhalten wir n Gleichungen, welche zwei von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent sind, wenn wir die Koeffizienten der unbestimmten Gröfsen $x_i^{(n)}$, d. h. die Minoren der Determinante nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, verschwinden lassen; diesen n Gleichungen entsprechen offenbar die den Basisraum R_{n-2} auf die n Projektionsräume R_{n-1} projizierenden Räume. Wir sagen deshalb, die Matrixgleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 57)$$

sei die Gleichung des Raumes R_{n-2}, indem wir durch diese Gleichung ausdrücken, dafs die in der Matrix enthaltenen Determinanten vom Grade n alle verschwinden sollen; der noch hinzutretende Minor des letzten Elementes liefert dann die Gleichung des Raumes R_{n-1} durch den R_{n-2} und O, welcher in Verbindung mit den Betrachtungen der Nr. 83 als projizierender Raum vom R_{n-2} auf $\bar{U}_n$ gedeutet werden kann.

Aufgabe 182. Suche die Gleichungen der projizierenden Räume der Ebene durch die Punkte $E = (1, 2, 0, 0)$, $F = (0, 1, 3, 0)$, $G = (0, 0, 1, 4)$ von R_4.

[Man erhält $12x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 24$, $6x_1 + 2x_3 + x_4 = 6$,
$-4x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$, $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$,
$24x_1 - 12x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$.]

Digitized by Google

Natürlich kann man in der angegebenen Weise weitergehen. Sind nämlich im R_n zur Bestimmung eines Raumes R_d $d+1$ Punkte $x_i^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots d+1)$ gegeben, so kann man die Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots x_n^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(d+1)} & x_2^{(d+1)} & \ldots x_n^{(d+1)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 58)$$

als die Gleichung des Raumes R_d betrachten, wenn man hierunter nur versteht, dafs alle in ihr enthaltenen Determinanten vom Grade $d+2$ verschwinden sollen. Die dadurch entstehenden Gleichungen entsprechen dann wieder den $\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(d+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots(n-d)}$ Räumen R_{n-1} durch R_d und $n-d$ Punkte des aus dem Ursprunge O und den n uneigentlichen Achsenpunkten gebildeten Systems von $n+1$ Punkten; das ganze System dieser Gleichungen ist, wie aus der geometrischen Interpretation unmittelbar hervorgeht, $n-d$ von einander unabhängigen unter ihnen äquivalent.

87. **Schnittpunktbestimmung.** Wir wenden uns zweitens zum entgegengesetzten Probleme, die Koordinaten des Schnittpunktes von n durch ihre Gleichungen

$$\xi_1^{(k)} x_1 + \xi_2^{(k)} x_2 + \ldots \xi_n^{(k)} x_n + 1 = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

gegebenen Räumen R_{n-1} zu bestimmen, was offenbar auf die Lösung dieser n Gleichungen nach den n Koordinaten x_i hinauskommt. Diese Lösung kann mittels der bekannten Determinantengesetze unmittelbar vorgenommen werden. Ist nämlich X die Determinante der n^2 Koeffizienten $\xi_i^{(k)}$, wo i konstant ist für alle Elemente einer nämlichen Vertikal- und k für alle Elemente einer nämlichen Horizontalreihe, und versteht man unter X_i das Resultat, welches man erhält, wenn man in X die Elemente der i^{ten} Vertikalreihe alle durch die Einheit ersetzt, so wird die verlangte Lösung bekanntlich durch die Formeln

$$x_i = -\frac{X_i}{X}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 59)$$

geliefert.

Digitized by Google

Aufgabe 183. Suche den Schnittpunkt der vier Räume

$$ax_i + bx_{i+1} + cx_{i+2} + dx_{i+3} = 1$$

in R_4, wo i der Reihe nach durch 1, 2, 3, 4 zu ersetzen ist und nachher für x_5, x_6, x_7 der Reihe nach x_1, x_2, x_3 geschrieben werden mufs.

[Man findet sogar ohne Rechnung $x_i = \dfrac{1}{a+b+c+d}$.]

Für weitere Zwecke weisen wir auf eine Lösung mittels Raumkoordinaten hin. Wir haben dann die Gleichung des Punktes zu bestimmen, welcher in den n Räumen R_{n-1} mit den Koordinaten $\xi_i^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots n)$ liegt. Dazu eliminieren wir zwischen der Gleichung 42) und den n Bedingungsgleichungen

$$\xi_1^{(k)} x_1 + \xi_2^{(k)} x_2 + \ldots + \xi_n^{(k)} x_n + 1 = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

die n Gröfsen x_i und erhalten dann die gesuchte Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_n & 1 \\ \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \xi_3^{(1)} & \ldots & \xi_n^{(1)} & 1 \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \xi_3^{(2)} & \ldots & \xi_n^{(2)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(n-1)} & \xi_2^{(n-1)} & \xi_3^{(n-1)} & \ldots & \xi_n^{(n-1)} & 1 \\ \xi_1^{(n)} & \xi_2^{(n)} & \xi_3^{(n)} & \ldots & \xi_n^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad 60)$$

Dieses Resultat wird wieder leicht bestätigt; in Bezug auf diesen Punkt verweisen wir nach den oben[86a)] unmittelbar auf 56) folgenden Zeilen. Und das neue Resultat 60) stimmt offenbar mit jenem der Gleichungen 59) überein. Denn die Raumkoordinatengleichung des Punktes 59) ist $\sum_1^n \xi_i X_i + X = 0$, welche Gleichung auch erhalten wird, wenn man die Determinante aus der Gleichung 60) nach den Elementen der ersten Horizontalreihe entwickelt.

Betrachtet man in der Gleichung 60) nur die Räume R_{n-1} mit den Koordinaten $\xi_i^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ als gegeben, denkt man sich also die Gröfsen $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots \xi_n^{(n)}$ ganz willkürlich, so hat man es mit allen Punkten der $n-1$

Digitized by Google

Räumen R_{n-1} gemeinsamen Gerade zu thun. Es verschwinden dann wieder die Minoren der Determinante nach den Elementen $\xi_i^{(n)}$ der letzten Horizontalreihe, und die dadurch entstehenden n Gleichungen, welche zwei von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent sind, bestimmen die Schnittpunkte dieser Gerade mit den n Projektionsräumen R_{n-1}; der noch hinzutretende Minor des letzten Elementes dieser Reihe liefert dann den uneigentlichen Punkt dieser Gerade.

So weitergehend erblickt man in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & 1 \\ \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \dots & \xi_n^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(d+1)} & \xi_2^{(d+1)} & \dots & \xi_n^{(d+1)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 61)$$

die analytische Darstellung des Raumes R_{n-d-1}, indem mit dieser Schreibweise gemeint ist die $\frac{(n+1)n(n-1)\dots(d+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-d)}$ Determinanten $d+2^{\text{ten}}$ Grades des ersten Gliedes sollen alle verschwinden. Diese Gleichungen entsprechen dann wieder den Schnittpunkten des Raumes R_{n-d-1} mit den Seitenräumen R_{d+1} des von den Koordinatenräumen R_{n-1} und $\overline{U}_n$ begrenzten Simplex $S(n+1)$; das ganze System dieser Gleichungen ist $n-d$ von einander unabhängigen aus ihnen äquivalent.

88. **Zusammenhang zwischen den alten und neuen Formeln.** Wir wollen jetzt zeigen, wie eng die letzten Entwickelungen mit den früheren Betrachtungen verknüpft sind. Dazu bemerken wir zunächst, dafs die Gleichungen 28) und 58) den nämlichen Raum R_d, die Gleichungen 46) und 61) den nämlichen Raum R_{n-d-1} darstellen; allein in den Gleichungen 28) und 61) treten die in den Räumen liegenden Punkte, in den Gleichungen 46) und 58) die durch die Räume gehenden Räume R_{n-1} in den Vordergrund. Allerdings müssen deshalb die Gleichungen 28) und 58), sowie die Gleichungen 46) und 61) sich mit einander vertragen. Und offenbar thun sie das. Denn man erhält unmittelbar die $\frac{(n+1)n(n-1)\dots(d+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-d)}$ in 58) und 61) enthaltenen Gleichungen, wenn man auf alle möglichen Arten die $d+1$

Digitized by Google

Gröfsen λ_k aus 28) und die $d+1$ Gröfsen k aus 46) eliminiert. Also sind die Gleichungen 58) und 61) nichts anderes als die Lösungen der Gleichungen 28) und 46), welche wir — um den dort befolgten Gedankengang nicht zu unterbrechen — in den Formeln 29) und 47) nur angedeutet, nicht ausgeführt haben.

Ist hiermit der Zusammenhang der Formelgruppen zu Tage gefördert, so ist doch noch nicht klar geworden, wie man zwei Gleichungssysteme erhalten kann, von denen das eine wie 28) in den x_i einen Raum R_d als Aggregat der in ihm enthaltenen Punkte, das andere wie 46) in den ξ_i den *nämlichen* Raum als Aggregat der durch ihn gehenden Räume R_{n-1} darstellt. Wir wenden uns also jetzt diesem Probleme zu.

Geometrisch gestaltet das vorliegende Problem sich folgendermafsen. Bekanntlich bestimmen $n-d$ von einander unabhängige Räume R_{n-1} einen Raum R_d. Geht man also von den Formeln 28) aus, d. h. denkt man sich zur Bestimmung des R_d die $d+1$ Punkte $x_i^{(k)}$, $(k=1, 2, \ldots d+1)$ beliebig gegeben, so bestimme man $n-d$ von einander unabhängige Räume $R_{n-1}^{(1)}, R_{n-1}^{(2)}, \ldots R_{n-1}^{(n-d)}$, welche die $d+1$ gegebenen Punkte enthalten; sind $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \ldots \xi_i^{(n-d)}$ die Koordinaten dieser Räume, so liefert das Gleichungssystem

$$\xi_i = \frac{k_1 \xi_i^{(1)} + k_2 \xi_i^{(2)} + \ldots + k_{n-d} \xi_i^{(n-d)}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-d}}, \quad (i=1, 2, \ldots n) \quad 62)$$

das verlangte Gegenstück zum Systeme 28) oder auch die Matrixgleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & 1 \\ \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \ldots & \xi_n^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(n-d)} & \xi_2^{(n-d)} & \ldots & \xi_n^{(n-d)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 63)$$

das verlangte Gegenstück zur Gleichung 58). Es bleibt also nur die Frage, wie man die $n-d$ Räume R_{n-1} am leichtesten erhält. Wie es uns scheinen will, kommt man mittels der Matrixgleichung 58) mit der geringsten Arbeit zum Ziele, indem man z. B. von den ersten $n-d$ Vertikalreihen $n-d$-mal

Digitized by Google

nach einander nur eine stehen läfst. Auf diese Weise bildet man z. B. die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

der Ebene durch die drei in R_5 gegebenen Punkte A, B, C mit den Punktkoordinaten a_i, b_i, c_i in die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 1 \\ (4,5) & 0 & 0 & (5,1) & (1,4) & (4,1,5) \\ 0 & (4,5) & 0 & (5,2) & (2,4) & (4,2,5) \\ 0 & 0 & (4,5) & (5,3) & (3,4) & (4,3,5) \end{vmatrix} = 0$$

um, wo zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_f & a_g & 1 \\ b_f & b_g & 1 \\ c_f & c_g & 1 \end{vmatrix} = (f, g), \quad \begin{vmatrix} a_f & a_g & a_h \\ b_f & b_g & b_h \\ c_f & c_g & c_h \end{vmatrix} = (f, g, h)$$

gesetzt worden ist.

Aufgabe 184. Von einer Ebene in R_n sind die drei Punkte

$$(a_1, 0, 0, 0, \ldots 0), \ (0, a_2, 0, 0, \ldots 0), (0, 0, a_3, 0, \ldots 0)$$

gegeben. Man fragt diese Ebene mittels Raumkoordinaten ξ darzustellen.

[Man hat $\xi_1 = -\frac{1}{a_1}$, $\xi_2 = -\frac{1}{a_2}$, $\xi_3 = -\frac{1}{a_3}$ und $\xi_4, \xi_5, \ldots \xi_n$ sind unbestimmt; weshalb?]

Aufgabe 185. Suche die Gleichung in ξ des Raumes R_3 durch die vier in R_5 gegebenen Punkte A, B, C, D mit den Punktkoordinaten a_i, b_i, c_i, d_i.

[Man findet in der analogen Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 1 \\ (3,4,5) & 0 & (4,1,5) & (1,3,5) & (3,1,4) & (1,3,4,5) \\ 0 & (3,4,5) & (4,2,5) & (2,3,5) & (3,2,4) & (2,3,4,5) \end{vmatrix} = 0.]$$

89. **Bestimmung von gemeinsamen Elementen.** In Bezug auf andere analytische Probleme, die hier erörtert werden können, müssen wir uns beschränken; deshalb

Digitized by Google

widmen wir lediglich einige Worte der Aufgabe, die Punkte und die Räume R_{n-1} zu bestimmen, welche zwei gegebenen Räumen R_{d_1} und R_{d_2} gemein sind. Denkt man sich die Räume R_{d_1}, R_{d_2} durch Punkte bestimmt, so giebt Auflösung der n Gleichungen

$$\frac{\sum_1^{d_1+1} \lambda_k^{(1)} x_i^{(k)}}{\sum_1^{d_1+1} \lambda_k^{(1)}} = \frac{\sum_1^{d_2+1} \lambda_k^{(2)} x_i^{(k)}}{\sum_1^{d_2+1} \lambda_k^{(2)}}, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad 64)$$

das System der gemeinschaftlichen Punkte. In diesen Gleichungen finden sich $d_1 + d_2$ zur Verfügung stehende Parameter vor, die Verhältnisse der $d_1 + 1$ Gröfsen $\lambda_k^{(1)}$ und die Verhältnisse der $d_2 + 1$ Gröfsen $\lambda_k^{(2)}$. Also sind die Räume R_{d_1}, R_{d_2} im allgemeinen zu einander windschief oder lassen sie einen gemeinsamen Punkt oder aber einen Raum $R_{d_1+d_2-n}$ von gemeinsamen Punkten zu, je nachdem $n > d_1 + d_2$ oder $n = d_1 + d_2$ oder aber $n < d_1 + d_2$ ist, gerade wie es die im ersten Paragraphen entwickelten Formeln erheischen.

Aufgabe 186. Man fragt die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei im R_4 durch ihre Spurpunkte E, F, G gegebenen Ebenen

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[Weil $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ durch Vertauschung von x_1 und x_4 und von x_2 und x_3 in einander übergehen, so hat man für den Schnittpunkt $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$. Mit Hilfe dieser Bemerkung findet man leicht $x_1 = x_4 = \frac{6}{14}, x_2 = x_3 = \frac{33}{14}$.]

Aufgabe 187. Suche den Schnittpunkt der Ebenen

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ -6 & 5 & 6 & -35 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

[Man findet $x_1 = 14, x_2 = 20, x_3 = 14, x_4 = 12.$]

Im allgemeinen findet man für die Gleichung des Schnittpunktes in Raumkoordinaten mit Hilfe einer oben angegebenen Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 1 \\ (3,4) & 0 & (4,1) & (1,3) & (3,1,4) \\ (3,4)' & 0 & (4,1)' & (1,3)' & (3,1,4)' \\ 0 & (3,4) & (4,2) & (2,3) & (3,2,4) \\ 0 & (3,4)' & (4,2)' & (2,3)' & (3,2,4)' \end{vmatrix} = 0, \quad 65)$$

wo sich die ungestrichenen Determinanten auf die Punkte der einen, die gestrichenen auf die Punkte der andern Ebene beziehen.]

Natürlich können die Gleichungen 64) in besonderen Fällen, d. h. wenn sie nicht unabhängig von einander sind, zu anderen Resultaten führen. So können z. B. zwei Ebenen in R_4, die im allgemeinen einen einzigen Punkt gemein haben, so gegeben sein, dafs sie eine Gerade gemein haben oder sogar zusammenfallen. Bei der Anwendung der Formeln 64) ergiebt sich dann, dafs Elimination von einigen der $d_1 + d_2$ Verhältnisse die Elimination von allen einschliefst. Wir bemerken noch, dafs die Bedingungen, unter denen zwei Räume R_{d_1}, R_{d_2} einen Raum R_{d_3} gemein haben, immer gefunden werden können mit Hilfe der Bedingungen, dafs zwei Räume $R_{d_1 - d_3}, R_{d_2 - d_3}$ einen Punkt gemein haben, wie unmittelbar einleuchtet, wenn man die durch R_{d_3} gehenden Räume R_{d_1}, R_{d_2} schneidet durch irgend einen Raum $R_{n - d_3}$, für welchen man dann der Reihe nach eine hinreichende Anzahl von projizierenden Räumen $R_{n - d_3}$ nehmen kann.

Aufgabe 188. Unter welchen Bedingungen haben die zwei Ebenen ABC und $A'B'C'$ von R_4 eine Gerade gemein?

[Man suche die Spuren der Ebenen mit den Räumen $O(X_1X_2X_3)$, $O(X_2X_3X_4)$ und schreibe die zwei Bedingungen hin, dafs die gleichnamigen Spuren einen Punkt gemein haben.]

Aufgabe 189. Unter welcher Bedingung haben die zwei Ebenen ABC und $A'B'C'$ von R_5 einen Punkt gemein?

Man schreibe hin, dafs die Determinante der sechs Punkte

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 & c'_5 & 1 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

verschwinde; denn unter dieser Bedingung liegen die zwei Ebenen in einem R_4.]

Die vorhergehenden Betrachtungen enthalten die Andeutung zur Lösung einer grofsen Menge der verschiedenartigsten Probleme, von denen wir die Erörterung der Fragen nach dem Grade von Parallelismus zweier gegebener Gebilde besonders erwähnen. Dabei bemerken wir noch, dafs Ersetzung der Gleichungen 64) durch das analoge System in den Raumkoordinaten zu ganz analogen Entwickelungen führt. Der Fülle des Materials wegen sind wir genötigt, auf die systematische Behandlung dieser Probleme zu verzichten. Es möge genügen, hier einige Aufgaben einzuschalten, welche sich ausschliefslich auf den Raum R_4 beziehen.

Aufgabe 190. Bestimme die Gleichung des Raumes durch die zwei gegebenen Geraden

$$x_i = b_i x_4 + c_i, \quad x_i = b_i' x_4 + c_i', \quad (i = 1, 2, 3).$$

[Man findet mit Hilfe der Punktepaare $x_4 = \infty$ und $x_4 = 0$ der Geraden unmittelbar

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 & 0 \\ b_1' & b_2' & b_3' & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 1 \\ c_1' & c_2' & c_3' & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dafs dieses Resultat viel einfacher ist als das analoge der Gleichung 65) rührt von der einfacheren Form des hier verwendeten Gleichungssystems der Gerade her.]

Aufgabe 191. Suche die Bedingung, unter welcher die Ebenen mit den Spurpunkten $(a_1, a_2, 0, 0)$, $(0, b_2, b_3, 0)$, $(0, 0, c_3, c_4)$ und $(a_1', a_2', 0, 0)$, $(0, b_2', b_3', 0)$, $(0, 0, c_3', c_4')$ halb parallel sind.

[Sie ist

$$\begin{vmatrix} a_1 (a_2' - b_2') - a_1' (a_2 - b_2), & a_1 b_3' - a_1' b_3 \\ b_2 c_4' - b_2' c_4 & , \; c_4 (b_3' - c_3') - c_4' (b_3 - c_3) \end{vmatrix} = 0.]$$

Aufgabe 192. Suche den Spurpunkt der ersten Ebene der vorhergehenden Aufgabe mit der Projektionsebene $O(X_4 X_1)$.

Digitized by Google

[Man hat $\frac{x_1}{a_1 b_2 c_3} = \frac{x_4}{a_2 b_3 c_4} = \frac{1}{a_2 (b_3 - c_3) + b_2 c_3}$.]

Aufgabe 193. Suche die Bedingungen, unter welchen die zwei Ebenen

$$x_i = a_i x_3 + b_i x_4 + c_i, \quad x_i = a_i' x_3 + b_i' x_4 + c_i', \quad (i = 1, 2)$$

die besondere Eigenschaft haben, dafs irgend zwei ihrer uneigentlichen Punkte, welche in der Projektion auf $O(X_1 X_2)$ übereinstimmen, dies auch in der Projektion auf $O(X_3 X_4)$ thun [58b] (sieh Fig. 30).

[Sie sind $\frac{a_1}{a_1'} = \frac{b_1}{b_1'} = \frac{a_2}{a_2'} = \frac{b_2}{b_2'}$.]

Aufgabe 194. Bestimme die Gleichungen der gemeinschaftlichen Transversale der drei Geraden

$$\begin{array}{lll} & x_2 = a_2, & x_3 = a_3, \quad x_4 = a_4, \\ x_1 = b_1, & & x_3 = b_3, \quad x_4 = b_4, \\ x_1 = c_1, & x_2 = c_2, & x_4 = c_4, \end{array}$$

welche den Achsen OX_1, OX_2, OX_3 parallel sind.

[Man findet

$$\begin{aligned} (b_4 - c_4)\, x_1 &= (b_1 - c_1)\, x_4 + b_4 c_1 - b_1 c_4, \\ (c_4 - a_4)\, x_2 &= (c_2 - a_2)\, x_4 + c_4 a_2 - c_2 a_4, \\ (a_4 - b_4)\, x_3 &= (a_3 - b_3)\, x_4 + a_4 b_3 - a_3 b_4. \end{aligned}$$]

Aufgabe 195. Beweise, dafs man die Gleichungen eines Doppelviers von Geraden

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{vmatrix},$$

vergleiche Aufgabe 127, immer auf die homogene Form

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \ldots x_1 - x_3 = x_5, \; x_2 = 0, \; x_4 = 0 \\ a_2 \ldots x_2 - x_4 = x_5, \; x_1 = 0, \; x_3 = 0 \\ a_3 \ldots x_3 - x_2 = x_5, \; x_1 = 0, \; x_4 = 0 \\ a_4 \ldots x_4 - x_1 = x_5, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 \ldots x_4 - x_2 = x_5, \; x_1 = 0, \; x_3 = 0 \\ b_2 \ldots x_3 - x_1 = x_5, \; x_2 = 0, \; x_4 = 0 \\ b_3 \ldots x_1 - x_4 = x_5, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0 \\ b_4 \ldots x_2 - x_3 = x_5, \; x_1 = 0, \; x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

bringen kann.

Digitized by Google

[Man zerlege den Doppelvier (Fig. 57) in die windschiefen Vierseite $a_1\, b_2\, a_3\, b_4$ und $b_1\, a_2\, b_3\, a_4$, deren Seiten einander in vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 einer Ebene, der Schnittebene der Räume $(a_1\, a_3)$ und $(a_2\, a_4)$, begegnen. Dann ergiebt sich, wenn Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und R_1, R_2, R_3, R_4 in der angegebenen Weise die Eckpunkte der Vierseite sind, dafs die vier Geraden $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $Q_1 Q_3$, $R_1 R_3$ durch den nämlichen Punkt O gehen. Sind nun $P_{12}, P_{34}, Q_{13}, R_{13}$ die Punkte, welche durch die Paare (P_1, P_2), (P_3, P_4), (Q_1, Q_3), (R_1, R_3) harmonisch getrennt werden von O, so hat man $OP_{12}P_{34}Q_{13}R_{13}$ als Koordinatensimplex und den Schnittpunkt der vier Räume

$$P_1 P_{34} Q_{13} R_{13},\quad P_4 P_{12} Q_{13} R_{13},\quad Q_1 P_{12} P_{34} R_{13},\quad R_1 P_{12} P_{34} Q_{13}$$

als Einheitspunkt anzunehmen, um zu obigen Gleichungen zu gelangen.]

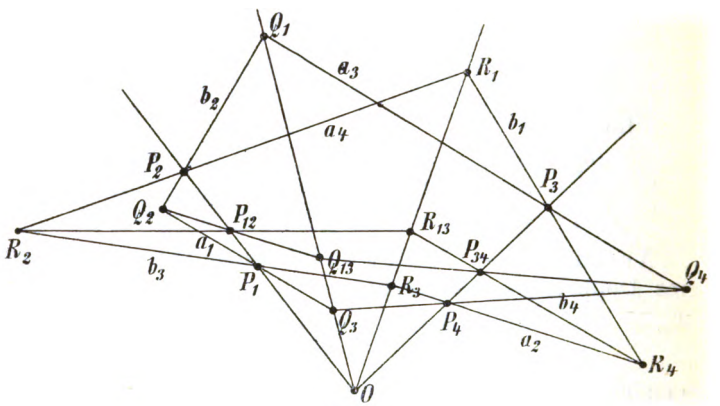


Fig. 57.

Aufgabe 196. Beweise mit Hilfe der obigen Gleichungen, dafs die Räume $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ durch die einander gegenüberliegenden Seitenpaare des Doppelviers eine Gerade gemein haben.

[Man findet die Gerade $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $x_5 = 0$.]

Aufgabe 197. Beweise, dafs diese Schnittgerade a_5 und die willkürlich gewählten Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 fünf einander derart zugeordnete Geraden sind, dafs jede von ihnen

Digitized by Google

die Schnittgerade ist der Räume durch die einander gegenüberliegenden Seitenpaare desjenigen Doppelviers, von welchem die vier übrigen Geraden eines der beiden Quadrupel bilden.

[Diese beiden letzten Sätze rühren von Segre her.]

90. **Graphische Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.** Die Bestimmung des Schnittpunktes von n mittels ihrer Gleichungen gegebenen Räumen R_{n-1} gelangt durch die Auflösung dieser n Gleichungen nach den n Koordinaten x_i zur analytischen Ausführung. Es liegt also der Gedanke nahe, falls das Problem vorliegt, ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten x_i nach diesen Gröfsen zu lösen, umgekehrt die gegebenen Gleichungen als analytische Ausdrücke von Räumen R_{n-1} zu betrachten, nach den Gesetzen der darstellenden Geometrie den Schnittpunkt dieser Räume zu konstruieren, und nachher die Koordinaten dieses Punktes aus der Bildebene abzulesen. Hierin besteht die sogenannte *graphische* Auflösung des gegebenen Gleichungssystems; sie benutzt in ihrer Anwendung natürlich die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Abbildung des mehrdimensionalen Raumes auf die Ebene mit Hilfe der schiefen Parallelprojektion(67), kann dabei aber — weil keine Orthogonalitätsverhältnisse ins Spiel treten — der mehrdimensionalen Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke entbehren. Bei der Ausführung werden die Räume R_{n-1} mittels ihrer aus den Achsengleichungen 32) hervorgehenden Achsenspuren angegeben. Und ist nach der Methode der darstellenden Geometrie der Schnittpunkt gefunden, so hat man nur noch alle Koordinaten dieses Punktes zu suchen, was ohne Mühe geschehen kann, weil die Konstruktion des Punktes ein dazu hinreichendes Material von durch den Punkt gehenden Geraden, Ebenen, Räumen, u. s. w. hinterläfst.

Aufgabe 198. Wie kann man verfahren, wenn eine der gegebenen Gleichungen homogen ist?

[Man gehe von einem zu diesem durch O gehenden Raume parallelen Raume aus, bestimme von diesem neuen Raume mittels der Achsenschnittpunkte die Spurgeraden mit den Projektionsebenen und zeichne sodann durch O zu diesen Spurgeraden parallele Geraden, u. s. w.]

Digitized by Google

91. **Orthogonalität und Abstand.** Sind im R_n ein Raum R_{n-d} und ein Punkt P gegeben, so ist der Ort der zu R_{n-d} senkrechten Geraden durch P ein R_d. Wir suchen nun sofort das Gleichungssystem dieses R_d und verwenden dabei ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in Bezug auf welches P durch die Koordinaten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und R_{n-d} durch die von einander unabhängigen Gleichungen

$$x_1 \cos \alpha_1^{(k)} + x_2 \cos \alpha_2^{(k)} + \ldots + x_n \cos \alpha_n^{(k)} - p^{(k)} = 0,$$
$$(k=1, 2, \ldots d)$$

bestimmt sein mag.

Nach den bekannten Eigenschaften der Hesse'schen Normalform sind

$$\frac{x_1}{\cos \alpha_1^{(k)}} = \frac{x_2}{\cos \alpha_2^{(k)}} = \ldots = \frac{x_n}{\cos \alpha_n^{(k)}}, \quad (k = 1, 2, \ldots d)$$

die Gleichungen der aus O auf diese d Räume R_{n-1} gefällten Lote. Also ist:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 1 \\ \varrho_1 \cos \alpha_1^{(1)} & \varrho_1 \cos \alpha_2^{(1)} & \ldots & \varrho_1 \cos \alpha_n^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_d \cos \alpha_1^{(d)} & \varrho_d \cos \alpha_2^{(d)} & \ldots & \varrho_d \cos \alpha_n^{(d)} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die ϱ_k, $(k = 1, 2, \ldots d)$ unendlich sind, das Gleichungssystem des Raumes R_d durch P und die uneigentlichen Punkte der d Lote, d. h. das verlangte Gleichungssystem. Wie unmittelbar einleuchtet, vereinfacht sich das System zu

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \ldots & x_n - a_n \\ \cos \alpha_1^{(1)} & \cos \alpha_2^{(1)} & \ldots & \cos \alpha_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos \alpha_1^{(d)} & \cos \alpha_2^{(d)} & \ldots & \cos \alpha_n^{(d)} \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 199. Beweise, dafs man die letzte Gleichung unmittelbar erhält, wenn man die Lote durch P legt.

Wird der gegebene Raum R_{n-d} durch die d Gleichungen

$$x_i = b_i x_{d+1} + c_i x_{d+2} + \ldots + r_i x_n + s_i, \quad (i = 1, 2, \ldots d)$$

bestimmt, so findet man in derselben Weise die Matrixgleichung

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1, & x_2-a_2, \ldots & x_{d-1}-a_{d-1}, & x_d-a_d, & x_{d+1}-a_{d+1}, & \ldots & x_n-a_n \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & \ldots & r_1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_2 & \ldots & r_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{d-1} & \ldots & r_{d-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_d & \ldots & r_d \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 200. Zeige, dafs die zwei durch O gehenden Ebenen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 x_3 + c_1 x_4 \\ x_2 &= b_2 x_3 + c_2 x_4 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} (b_1 c_2 - b_2 c_1) x_1 &= -c_2 x_3 + b_2 x_4 \\ (b_1 c_2 - b_2 c_1) x_2 &= c_1 x_3 - b_1 x_4 \end{aligned}\right\}$$

von R_4 senkrecht zu einander sind.

[Man beachte den besonderen Fall

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \cos\alpha + x_4 \sin\alpha \\ x_2 &= x_3 \sin\alpha - x_4 \cos\alpha \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} -x_1 &= x_3 \cos\alpha + x_4 \sin\alpha \\ -x_2 &= x_3 \sin\alpha - x_4 \cos\alpha \end{aligned}\right\},$$

wo die eine Ebene in die andere übergeht mittels Zeichenwechsels entweder von x_1 und x_2 oder von x_3 und x_4, d. h. mittels einer Drehung um zwei rechte Winkel entweder um $O(X_3 X_4)$ oder um $O(X_1 X_2)$.]

Wir würden die uns gesteckten Grenzen überschreiten, wenn wir die allgemeinen Probleme der Abstandsbestimmung für ein ganz beliebiges System von Dimensionenzahlen durchführen wollten; deshalb beschränken wir uns auf zwei Beispiele von verschiedenem Charakter, indem im ersten nur eine den gesuchten Abstand tragende Gerade auftritt, im zweiten sich ein Ort von solchen Geraden darbietet.

92. **Erstes Beispiel.** „Im R_5 sind eine Gerade und ein Raum durch die von einander unabhängigen Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2x_5 + 4 \\ x_2 &= 3x_5 + 2 \\ x_3 &= -3x_5 + 14 \\ x_4 &= 2x_5 + 21 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} -7x_1 &= 15x_3 + 2x_4 + x_5 + 401 \\ -7x_2 &= 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 209 \end{aligned}\right\}$$

gegeben; man soll die Gleichungen der den Abstand dieser Gebilde tragenden Gerade und die Länge des Abstandes berechnen.“

Wir suchen zunächst die Gleichung des Raumes R_4 durch O und die uneigentlichen Punkte der gegebenen Gebilde.

Digitized by Google

Sie wird erhalten mit Hilfe des uneigentlichen Punktes ($x_5 = \infty$) der Gerade und der drei uneigentlichen Punkte ($x_3 = \infty, x_4 = 0, x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = \infty, x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \infty$) des Raumes, in der Form

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ -15 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

was sich reduziert auf

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0.$$

Also giebt die durch O gehende Normale

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{2} = \frac{x_5}{1}$$

zu diesem R_4 die Richtung des Abstandes an.

Der Raum R_4 durch den gegebenen Raum und den uneigentlichen Punkt dieser Normale wird erhalten, indem wir in

$$-7(x_1 + kx_2) = (15 + 3k)x_3 + (2 + 6k)x_4 + (1 + 3k)x_5 + 401 + 209k$$

den Koeffizienten k so bestimmen, dafs die Substitution

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{2} = \frac{x_5}{1} = \varrho,$$

wo ϱ unendlich ist, dieser Gleichung Genüge leistet. Man findet $2k + 3 = 0$ und also für den gesuchten R_4

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 + 25 = 0.$$

Dieser Raum R_4 enthält die den Abstand tragende Gerade. Sein Schnittpunkt (2, 5, 11, 23, 1) mit der gegebenen Gerade ist der Punkt, wo der gesuchte Abstand auf dieser Gerade ruht. Also hat die den Abstand tragende Gerade, welche zu der Normale auf dem erstgefundenen Raume R_4 parallel ist, die Gleichungen

$$x_1 = x_5 + 1, \quad x_3 = 3x_5 + 8,$$
$$x_2 = 2x_5 + 3, \quad x_4 = 2x_5 + 21.$$

Digitized by Google

Weil diese Gerade dem gegebenen Raume im Punkte $(-9, -17, -22, 1, -10)$ begegnet, so wird die Länge des Abstandes durch die Gleichung

$$l^2 = (2+9)^2 + (5+17)^2 + (11+22)^2 + (23-1)^2 + (1+10)^2$$

bestimmt; deshalb findet man $l = 11\sqrt{19} = 47,\ 947\ldots$

93. **Zweites Beispiel.** „Im Raume R_4 sind eine Ebene und eine zu dieser Ebene parallele Gerade durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 4x_4 + 3 \\ x_2 &= 2x_3 - 7x_4 + 4 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_4 + 2 \\ x_2 &= 3x_4 + 4 \\ x_3 &= 5x_4 + 6 \end{aligned}\right\}$$

gegeben. Man soll die Gleichungen der Ebene, welche der Ort der den Abstand tragenden Geraden ist, und die Länge des Abstandes berechnen."

Wie man unmittelbar sieht, enthält die gegebene Ebene wirklich den uneigentlichen Punkt der gegebenen Gerade mit den Koordinaten

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5} = \frac{x_4}{1} = \varrho,$$

wo ϱ unendlich ist.

Der die gegebene Ebene enthaltende Raum

$$x_1 + kx_2 = (1+2k)x_3 - (4+7k)x_4 + 3 + 4k$$

geht durch den Punkt $(2, 4, 6, 0)$ der gegebenen Gerade für $k = -\frac{7}{12}$. Also ist

$$12x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 - 8 = 0$$

die Gleichung des die gegebenen Gebilde verbindenden Raumes. Deshalb stellen die Gleichungen

$$\frac{x_1}{12} = \frac{x_2}{-7} = \frac{x_3}{2} = \frac{x_4}{-1}$$

das aus O auf diesen Raum gefällte Lot dar. Nun ist jede den gesuchten Abstand tragende Gerade, weil sie in diesem Raume liegt, senkrecht zu diesem Lote; aufserdem ist sie senkrecht zu der gegebenen Ebene und also auch zu dem Raume

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 12 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

durch dieses Lot parallel zur gegebenen Ebene. Also giebt das aus O auf diesen Raum

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 + 19x_4 = 0$$

gefällte Lot

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-5} = \frac{x_4}{19}$$

die Richtung der den Abstand tragenden Geraden an. Die Ebene

$$25x_1 = 4x_3 + 5x_4 + 26, \quad 25x_2 = 14x_3 + 5x_4 + 16$$

durch die gegebene Gerade und den uneigentlichen Punkt dieses Lotes ist nun der Ort der den Abstand tragenden Geraden. Und die Länge des Abstandes wird gefunden als Abstand des Punktes (2, 4, 6, 0) der gegebenen Gerade vom Raume

$$3(x_1 - 3) + (x_2 - 4) - 5x_3 + 19x_4 = 0$$

durch den Punkt (3, 4, 0, 0) der gegebenen Ebene senkrecht zu den den Abstand tragenden Geraden; man erhält also, indem man die letzte Gleichung auf die Normalform bringt

$$-l = \frac{33}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2 + 19^2}} = \frac{33}{\sqrt{396}} = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$$

Aufgabe 201. Bestimme den Wert $l = 11\sqrt{19}$ des Abstandes des ersten Beispiels mit Hilfe des Raumes R_4 durch den gegebenen Raum parallel zur gegebenen Gerade.

[Dieser Raum hat die Gleichung

$$\left(x_1 + \frac{401}{7}\right) + 2\left(x_2 + \frac{209}{7}\right) + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0;$$

man berechne nun die Länge des Lotes aus dem Punkte (4, 2, 14, 21, 0) der gegebenen Gerade.]

Aufgabe 202. Bestimme die Projektion der im zweiten Beispiele gegebenen Gerade auf die dort gegebene Ebene.

Digitized by Google

[Man findet

$$x_1 = x_4 + \frac{2}{3},\ x_2 = 3x_4 - \frac{2}{3},\ x_3 = 5x_4 - \frac{7}{3}$$

als Schnitt der gegebenen Ebene mit dem Orte der den Abstand tragenden Geraden.]

Aufgabe 203. Berechne den Abstand der parallelen Geraden

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_4 + 2 \\ x_2 &= 3x_4 + 4 \\ x_3 &= 5x_4 + 6 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_4 + \frac{2}{3} \\ x_2 &= 3x_4 - \frac{2}{3} \\ x_3 &= 5x_4 - \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

[Mit Hilfe des Raumes

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 44$$

durch den Punkt (2, 4, 6, 0) der ersten Gerade senkrecht auf beiden, welcher mit der zweiten Gerade den Punkt $\left(\frac{27}{12}, \frac{49}{12}, \frac{67}{12}, \frac{19}{12}\right)$ bestimmt, findet man

$$l = \frac{1}{12}\sqrt{396} = \frac{1}{2}\sqrt{11},$$

wie oben.]

94. **Winkelbestimmung.** Der Winkel zweier durch O gehender Geraden

$$\frac{x_i}{a_i} = \varrho,\ \frac{x_i}{a_i'} = \varrho',\ (i = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\sigma a_i = \cos \alpha_i,\ \sigma' a_i' = \cos \alpha_i',\ (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo α_i, α_i' die Achsenwinkel der Geraden sind, aus 15) und 18). Man findet unmittelbar

$$\cos^2 \varphi = \frac{[\Sigma a_i a_i']^2}{\Sigma a_i^2 \cdot \Sigma a_i'^2}. \qquad 66)$$

Digitized by Google

Aufgabe 204. Bestimme den Winkel der Geraden, welche den Ursprung mit den Punkten (1, 1, 1, 1) und (1, — 1, 1, — 1) von R_4 verbinden.

[Dieser Winkel ist ein rechter.]

Mit Hilfe des ersten allgemeinen Satzes der Nr. 50 beweist man, dafs die Formel 66) ebenfalls den Winkel zwischen den zwei Räumen R_{n-1} dargestellt durch

$$\sum_1^n a_i x_i = \varrho, \quad \sum_1^n a_i' x_i = \varrho',$$

bestimmt.

Sind im R_n eine Gerade g und ein Raum R_d gegeben und will man den Winkel dieser Gebilde bestimmen, so ersetze man diese Gebilde durch zu ihnen parallele Gebilde der nämlichen Art, welche O enthalten, projiziere sodann die neue Gerade g' auf den neuen R_d' und berechne nun den Winkel zwischen g' und ihrer Projektion. Wir zeigen dies im folgenden Beispiele, wo wir die gegebenen Gebilde bereits parallel zu sich selbst nach O verschoben denken.

95. **Beispiel.** „Berechne den Winkel zwischen einer Gerade und einem Raume, welchen Gebilden in R_5 die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5, \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= k x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 &= x_3 + k x_4 + x_5 \end{aligned}\right\}$$

entsprechen.“

Wir projizieren den Punkt (1, 1, 1, 1, 1,) der gegebenen Gerade mittels der Ebene

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 & x_3 - 1 & x_4 - 1 & x_5 - 1 \\ -1 & 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

auf den gegebenen Raum und erhalten als Schnittpunkt dieser Ebene mit dem gegebenen Raume, d. h. als Projektion des angenommenen Punktes, den Punkt

$$x_1 = x_2 = \frac{k^2 + 3k + 5}{k^2 + 2k + 4}, \quad x_3 = x_4 = \frac{3}{k^2 + 2k + 4},$$

$$x_5 = \frac{k^2 + 2}{k^2 + 2k + 4}.$$

Digitized by Google

Also wird der gesuchte Winkel φ bestimmt durch die Gleichung

$$\cos^2\varphi = \frac{\{2(k^2+3k+5)+6+k^2+2\}^2}{5\{2(k^2+3k+5)^2+18+(k^2+2)^2\}} = \frac{3(k^2+2k+6)}{5(k^2+2k+4)}.$$

Schreiben wir die gefundene Gleichung in der Form

$$\cos^2\varphi = \frac{3}{5}\left\{1+\frac{2}{(k+1)^2+3}\right\},$$

so ergiebt sich sofort, dafs die Werte -1 und ∞ von k einem Maximum- und Minimumwerte von $\cos^2\varphi$ entsprechen; deshalb ist $\cos^2\varphi$ zwischen 1 und $\frac{3}{5}$ enthalten. Für $k=-1$ liegt die gegebene Gerade wirklich im gegebenen Raume; für $k=\infty$ fällt der gegebene Raum mit dem Projektionsraume $x_3=0$, $x_4=0$, d. h. mit $O(X_1X_2X_5)$ zusammen, u. s. w.

96. **Bestimmung zweier Winkel.** Wir betrachten jetzt einen Fall, wo — wie uns die geometrische Behandlung lehrte — durch die gegebenen Gebilde zwei Winkel gebildet werden. Wir denken uns in R_4 die zwei Ebenen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= ax_3+bx_4 \\ x_2 &= cx_3+dx_4 \end{aligned}\right\}$$

gegeben, und suchen nun in jeder dieser Ebenen eine Gerade derart zu bestimmen, dafs jede die Projektion der andern auf die sie enthaltende Ebene sei. Dazu nehmen wir in der ersten Ebene die durch O gehende Gerade

$$\frac{x_1}{0}=\frac{x_2}{0}=\frac{x_3}{\lambda}=\frac{x_4}{1} \qquad 67)$$

willkürlich an und projizieren nun den Punkt $(0, 0, \lambda, 1)$ dieser Gerade mittels der Ebene

$$\left.\begin{aligned} (ad-bc)x_1 &= -d(x_3-\lambda)+c(x_4-1) \\ (ad-bc)x_2 &= b(x_3-\lambda)-a(x_4-1) \end{aligned}\right\},$$

deren Gleichungen der Aufgabe 200 entnommen werden, auf die zweite Ebene. Damit der Schnittpunkt dieser neuen Ebene mit der zweiten sich rückwärts auf die erste Ebene

Digitized by Google

in die angenommene Gerade projiziere, müssen die Koordinaten x_3, x_4 dieses Punktes sich wie λ zu 1 verhalten. Also gilt die Bedingung

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-d\lambda(\varrho-1)+c(\varrho-1)}{b\lambda(\varrho-1)-a(\varrho-1)} = \frac{c-d\lambda}{b\lambda-a}.$$

In Verbindung mit den Gleichungen der zweiten Ebene findet man aber für diesen Schnittpunkt

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}.$$

Also muſs λ der Bedingungsgleichung

$$\lambda^2 - \frac{a^2+c^2-(b^2+d^2)}{ab+cd} - 1 = 0 \qquad 68)$$

Genüge leisten. Deshalb enthält die erste Ebene $O(X_3X_4)$ zwei Geraden der verlangten Art und stehen diese den Wurzeln λ_1, λ_2 obiger Gleichung entsprechenden Geraden wegen der Beziehung $\lambda_1\lambda_2 = -1$ senkrecht auf einander.

Die Gleichungen

$$\frac{x_1}{a\lambda+b} = \frac{x_2}{c\lambda+d} = \frac{x_3}{\lambda} = \frac{x_4}{1} \qquad 69)$$

der Projektion der angenommenen Gerade auf die zweite Ebene werden erhalten, indem man in den Gleichungen dieser Ebene für x_3, x_4 die Werte $\varrho\lambda$, ϱ substituiert. Der Winkel φ zwischen der angenommenen Gerade und ihrer Projektion wird also bestimmt durch die Gleichung

$$\cos^2\varphi = \frac{\lambda^2+1}{(a\lambda+b)^2+(c\lambda+d)^2+\lambda^2+1},$$

welche wir ersetzen durch

$$(a^2+c^2-\operatorname{tang}^2\varphi)\lambda^2+2(ab+cd)\lambda+(b^2+d^2-\operatorname{tang}^2\varphi)=0. \qquad 70)$$

Die Berechnung von φ erfordert die Elimination von λ aus den Gleichungen 70) und 68), welche wir zu diesem Zwecke abkürzend auf die Form

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0,\quad B\lambda^2-(A-C)\lambda-B=0$$

bringen. Man findet

$$(AC-B^2)[2B^2+(A-C)^2]=0 \qquad 71)$$

Digitized by Google

und also, da der zweite Faktor den Winkel φ nicht enthält,

$$\operatorname{tang}^4\varphi - (a^2+b^2+c^2+d^2)\operatorname{tang}^2\varphi + (ad-bc)^2 = 0. \quad 72)$$

Wir deuten noch zwei andre Wege an, die zu der Gleichung 72) führen. An und für sich bestimmt 70) den von der Gerade 69) der zweiten Ebene mit ihrer Projektion 67) auf die erste Ebene gebildeten Winkel φ. Nach der Methode der elementaren Algebra werden Maximum und Minimum dieses Winkels gefunden mittels der Grenzwerte von $\operatorname{tang}^2\varphi$, für welche die quadratische Gleichung 70) zwei gleiche Wurzeln λ zuläfst, weil der Fall der Gleichheit dieser Wurzeln den Übergang von reellen zu imaginären Wurzeln bildet. Also ergiebt sich

$$(a^2+c^2-\operatorname{tang}^2\varphi)(b^2+d^2-\operatorname{tang}^2\varphi) = (ab+cd)^2,$$

was mit 72) — vergleiche $AC-B^2=0$ von 71) — identisch ist.

Die dritte Methode zur Herleitung der Gleichung 72) beruht auf einer zweimaligen Wiederholung des letzten Verfahrens. Nimmt man nämlich in jeder der beiden Ebenen eine Gerade willkürlich an, stellt man z. B. der Gerade 69) die durch Ersetzung von λ durch μ aus 67) hervorgehende zur Seite, so ist in der den Winkel φ beider Geraden bestimmenden Gleichung

$$\cos^2\varphi = \frac{(\lambda\mu+1)^2}{(\mu^2+1)\{(a\lambda+b)^2+(c\lambda+d)^2+\lambda^2+1\}}$$

$\cos^2\varphi$ so zu wählen, dafs diese Gleichung, sowohl als Gleichung in μ wie als Gleichung in λ, zwei gleiche Wurzeln zuläfst. Mit μ anfangend findet man, wenn die Form zwischen Accoladen abkürzend f genannt wird, aus

$$(f\cos^2\varphi-\lambda^2)\mu^2 - 2\lambda\mu + (f\cos^2\varphi-1) = 0$$

unmittelbar die Bedingung

$$(f\cos^2\varphi-\lambda^2)(f\cos^2\varphi-1) - \lambda^2 = 0,$$

was auf 72 zurückführt, u. s. w.

Aufgabe 205. Bestimme die Winkel der beiden Ebenen

$$\left.\begin{matrix} x_1 + lx_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} mx_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

[Man findet in derselben Weise

$$\cos^2\varphi = \frac{l^2+lm+m^2+2 \pm (l+m)\sqrt{l^2+m^2+2}}{(l^2+2)(m^2+2)}.$$

Digitized by Google

Deshalb bilden für $l + m = 0$ alle Geraden der einen Ebene mit ihren Projektionen auf die andere Ebene gleiche Winkel.]

Aufgabe 206. Beweise, dafs die gleichen Winkel φ der vorhergehenden Aufgabe für $l = m = 0$ den Minimumwert $\frac{1}{4}\pi$ haben.

Wir möchten noch besonders betonen, dafs die Gleichung 72) die gesuchten Winkel liefert in allen Fällen, wo sich die Gleichungen der beiden Ebenen auf die oben angenommene Form

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 = a x_3 + b x_4 \\ x_2 = c x_3 + d x_4 \end{matrix}\right\}$$

bringen lassen. Wir zeigen dies an zwei verschiedenen Beispielen, die uns später bei der Betrachtung einer bestimmten Figur im Raume R_5 nützlich sein werden. Es handelt sich dabei zuerst um die beiden von den durch den Ursprung gehenden und im vierdimensionalen Raume $x_3 = x_4$ liegenden Ebenen

$$[x_2 = x_3 = x_4 = x_5], \quad [x_1 + x_2 = 0, \; x_3 = x_4 = 0]$$

gebildeten Winkel. Mit Hilfe der einfachen Transformation

$$\left.\begin{matrix} x_1\sqrt{2} = y_1 + y_2 \\ x_2\sqrt{2} = y_1 - y_2 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_3\sqrt{2} = y_3 + y_4 \\ x_4\sqrt{2} = y_3 - y_4 \end{matrix}\right\}, \quad x_5 = y_5,$$

welche die Räume R_4 mit den Gleichungen $x_3 = x_4, x_1 + x_2 = 0$ zu Koordinatenräumen macht, erhält man

$$[y_1 - y_2 = y_3 = y_5\sqrt{2}, y_4 = 0], \; [y_1 = y_3 = y_4 = 0],$$

und von diesen nun im vierdimensionalen Raume $y_4 = 0$ liegenden Ebenen

$$\left.\begin{matrix} y_1 = y_2 + y_5\sqrt{2} \\ y_3 = y_5\sqrt{2} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

sind die Winkel nach 72) durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}^4\varphi - 5\operatorname{tang}^2\varphi + 2 = 0$$

bestimmt; also findet man $\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17})$.

Digitized by Google

Im obigen Beispiele hat der vierdimensionale Raum durch die beiden Ebenen eine ganz einfache Gleichung; ist dies nicht der Fall, so wird die Transformation etwas schwieriger. Im zweiten Beispiele der Ebenen

$[x_2 = x_3 = x_4,\ x_5 = 0],\ [x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 + x_5 = 0]$

wird dieser Raum durch die Gleichung $x_3 - x_4 - x_5 = 0$ dargestellt, was uns nötigt $x_3 - x_4 - x_5 = y_3\sqrt{3}$ zu setzen. Fügt man die Gleichungen $2x_3 + x_4 + x_5 = y_4\sqrt{6}$ und $x_4 - x_5 = y_5\sqrt{2}$ hinzu und führt zu gleicher Zeit x_1 und x_2 mittels der Gleichungen $x_1 + x_2 = y_1\sqrt{2}$, $x_1 - x_2 = y_2\sqrt{2}$ in y_1 und y_2 über, so hat man umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} x_1\sqrt{2} &= y_1 + y_2 \\ x_2\sqrt{2} &= y_1 - y_2 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x_3\sqrt{6} &= y_3\sqrt{2} + 2y_4 \\ x_4\sqrt{6} &= -y_3\sqrt{2} + y_4 + y_5\sqrt{3} \\ x_5\sqrt{6} &= -y_3\sqrt{2} + y_4 - y_5\sqrt{3} \end{aligned}\right\}.$$

Schafft man die Gleichung $y_3 = 0$ beiseite, so sind die beiden Ebenen im vierdimensionalen Raume $y_3 = 0$ durch die Paare von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_2 + 2y_5 \\ y_4 &= y_5\sqrt{3} \end{aligned}\right\},\quad \begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

gekennzeichnet; deshalb findet man $\operatorname{tang}^2\varphi = 4 \pm \sqrt{13}$.

Aufgabe 207. Wie findet man zu der Gleichung $x_3 - x_4 - x_5 = 0$ die Gleichungen $2x_3 + x_4 + x_5 = 0$ und $x_4 - x_5 = 0$, und weshalb setzt man die linken Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach $y_3\sqrt{3}$, $y_4\sqrt{6}$ und $y_5\sqrt{2}$ gleich?

[Die Gleichungen $2x_3 + x_4 + x_5 = 0$ und $x_4 - x_5 = 0$ werden bestimmt durch die Bedingungen der Orthogonalität; innerhalb dieser Bedingungen sind die neuen Koeffizienten willkürlich. Man setzt die linken Seiten der Reihe nach $y_3\sqrt{3}$, $y_4\sqrt{6}$, $y_5\sqrt{2}$ gleich, damit y_3, y_4, y_5 die Normalformen der neuen Koordinatenräume R_4 seien.]

Wir weisen darauf hin, dafs die letzten Beispiele das analytische Gegenstück der Nr. 66 bilden.

Wie findet man, so fragen wir schliefslich, wenn die beiden Winkel φ_1, φ_2 zwischen zwei im R_4 gegebenen Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ berechnet sind, die beiden Winkel φ_1', φ_2' zwischen

Digitized by Google

ε und der durch den Schnittpunkt O von ε und ε' gehenden zu ε' normalen Ebene ε''? Mit Hilfe des Resultates der Aufgabe 200 ergiebt sich, dafs die Substitution

$$\operatorname{tang}^2\varphi = (a\,d - b\,c)^2 \operatorname{tang}^2\varphi'$$

in 72) zum Ziele führt. Aber noch einfacher ist es zu bemerken, dafs die neuen Winkel φ_1', φ_2' die Komplemente der Winkel φ_1, φ_2 sind.(50b)

---

§ 7. Geometrie der Lage.

97. **Das Prinzip der Dualität.** In der Ebene stehen der Punkt und die Gerade einander derart gegenüber, dafs sich jedem Satze der ebenen Geometrie der Lage ein anderer zur Seite stellt, den man aus jenem hervortreten läfst, indem man die Ausdrücke Punkt und Gerade, Punktreihe und Strahlenbüschel, u. s. w. mit einander vertauscht. Dadurch wird das Studium der Planimetrie im allgemeinen erleichtert. Denn nach diesem Prinzipe wird der Lehrstoff in zwei einander wie man sagt „dual" gegenüberstehende Teile zerlegt, von welchen der eine auf den andern schliefsen läfst. Im Raume stehen der Punkt und die Ebene einander in derselben Weise dual gegenüber und deshalb führt bei Sätzen der stereometrischen Geometrie der Lage die Vertauschung der Ausdrücke Punkt und Ebene, Punktreihe und Ebenenbüschel, Punktfeld und Ebenenbündel, Strahlenfeld und Strahlenbündel, u. s. w. zum analogen Ziele; dabei gehen die Gerade und der Strahlenbüschel in sich selbst über. Es läfst sich erwarten, dafs auch in der mehrdimensionalen Geometrie das Prinzip der Dualität zur Geltung kommen kann; dabei werden dann Punkt und Raum R_{n-1} einander dual gegenüberstehen müssen. Der Beweis, dafs dies wirklich der Fall ist, wird in den folgenden Nummern geliefert werden.

Nach dem Prinzipe der Dualität mufs es ebenso gut möglich sein, die geometrischen Betrachtungen im R_n auf den Raum R_{n-1} als Hauptelement zu gründen, wie auf den Punkt. Wirklich erzeugt man mittels des Prozesses der Schnittbildung aus den Räumen R_{n-1} ebenso leicht die Räume R_{n-2}, R_{n-3}, R_{n-4}, ... wie mittels des Prozesses der Scheinbildung aus den Punkten die Geraden, die Ebenen,

Digitized by Google

die Räume ... Wirklich sind die Punkt- und Raumkoordinaten des vorhergehenden Paragraphen völlig gleichberechtigt, und stehen die Formelgruppen 45) und 24), 44) und 25), 48) und 30) einander dual gegenüber.

Es möge vorläufig genügen, ein Paar erläuternder Beispiele einzuschalten. Zunächst haben wir gefunden — vergleiche Nr. 26 und die Aufgaben 126 und 127 —, dafs drei zu einander windschiefe Geraden von R_4 eine gemeinschaftliche Transversale zulassen, die Schnittlinie der drei durch diese Geraden zu je zweien bestimmten Räume. Mehr allgemein bestimmen $n+1$ willkürlich im R_{2n} gewählte Geraden einen Raum R_{n-1}, welcher mit jeder dieser $n+1$ Geraden einen Punkt gemein hat, den Schnittraum R_{n-1} der $n+1$ durch diese $n+1$ Geraden zu je n bestimmten Räume R_{2n-1}; denn jeder dieser $n+1$ Räume R_{2n-1} enthält n von einander unabhängige Punkte irgend eines den gestellten Bedingungen Genüge leistenden Raumes R_{n-1}. Ohne weiteres folgt hieraus mittels des Prinzips der Dualität, dafs $n+1$ willkürlich im R_{2n} angenommene Räume R_{2n-2} einen Raum R_n bestimmen, welcher mit jedem dieser Räume R_{2n-2} in einem Raume R_{2n-1} liegt und also jedem dieser Räume R_{2n-2} in einem Raume R_{n-1} begegnet, nämlich den Raum R_n durch die $n+1$ Punkte, welche die $n+1$ Räume R_{2n-2} zu je n mit einander gemein haben. Für den besonderen Fall $n=2$ erhalten wir — vergleiche die Aufgaben 130 und 131 — auch sofort die dualistische Umkehrung der in den Aufgaben 196 und 197 niedergelegten Sätze von Segre; hierauf kommen wir — vergleiche Aufgabe 210 — bald zurück.

Im Raume R_{2n-1} bestimmen irgend ein willkürlich angenommener Punkt P und n willkürliche Geraden allgemein einen durch P gehenden Raum R_{n-1}, welcher mit jeder der n gegebenen Geraden einen Punkt gemein hat, den Schnittraum R_{n-1} der n Räume R_{2n-2} durch P und $n-1$ der gegebenen Geraden; denn jeder dieser n Räume R_{2n-2} enthält n von einander unabhängige Punkte irgend eines den gestellten Bedingungen Genüge leistenden Raumes R_{n-1}. Dieser Satz — vergleiche Nr. 26 für den besonderen Fall $n=2$ — bildet sich dualistisch in den folgenden um: Im Raume R_{2n-1} bestimmen ein Raum R_{2n-2} und n Räume

Digitized by Google

R_{2n-3} allgemein einen im R_{2n-2} liegenden Raum R_{n-1}, welcher mit jedem der n gegebenen Räume R_{2n-3} in einem Raume R_{2n-2} liegt und deshalb jedem dieser gegebenen Räume R_{2n-3} in einem Raume R_{n-2} begegnet, nämlich den Raum R_{n-1} durch die n Schnittpunkte von R_{2n-2} mit den n Gruppen von $n-1$ aus den n Räumen R_{2n-3}.

98. **Die Orthogonalitätsverwandtschaft.** Hat man im Raume R_n einen Punkt O willkürlich gewählt, so kann man jedem Raume R_{n-1} denjenigen Punkt P zuordnen, welcher auf dem aus O auf diesen R_{n-1} gefällten Lote eine solche Lage hat, dafs dem Produkt der Abstände von O zu den einander entsprechenden Elementen R_{n-1} und P ein mit bestimmtem Vorzeichen gegebener Wert zukommt. Dadurch ist dann zwischen den Räumen R_{n-1} und den Punkten P vom R_n eine Verwandtschaft hergestellt, welche beherrscht wird vom allgemeinen Gesetze:

Geht der P zugeordnete Raum R_{n-1} durch P', so geht auch umgekehrt der P' zugeordnete Raum R'_{n-1} durch P.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Ist nämlich (Fig. 58) die Bildebene durch die Lote OQ, OQ' aus O auf R_{n-1}, R'_{n-1} gelegt, und werden die Geraden g, g', in welchen R_{n-1}, R'_{n-1} auf dieser Ebene senkrecht stehen, in Q und Q' von diesen Loten geschnitten, so mufs der im R_{n-1} liegende Punkt P' des Satzes der Schnittpunkt von OQ' mit g sein und giebt also das Produkt von OP' in OQ' den konstanten Wert der Verwandtschaft an, welchen wir ihre „Potenz“ nennen wollen. Ist nun P'' der Schnittpunkt von OQ mit g', so folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $OP'Q$ und $OP''Q'$, dafs die Produkte $OP'.OQ'$ und $OP''.OQ$ einander gleich sind; woraus dann weiter hervorgeht, dafs P'' der R_{n-1} zugeordnete Punkt P sein, P also in R'_{n-1} liegen mufs.

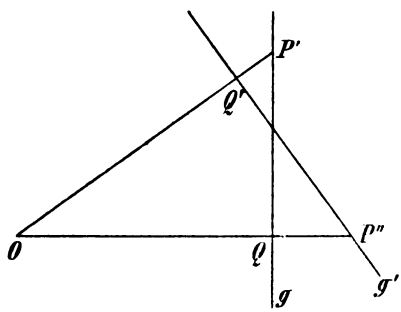


Fig. 58.

Digitized by Google

Nimmt man in dem einem gegebenen Punkte P zugeordneten Raume R_{n-1} ein Simplex $S(n)$ an, so gehen die Räume $R^{(1)}_{n-1}$, $R^{(2)}_{n-1}$, ... $R^{(n)}_{n-1}$, welche den n Eckpunkten $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ dieses Simplex entsprechen, nach obigem allgemeinen Gesetze durch P. Aufserdem leuchtet unmittelbar ein, dafs diese n Räume $R^{(1)}_{n-1}$, $R^{(2)}_{n-1}$, ... $R^{(n)}_{n-1}$ keinen zweiten Punkt Q gemein haben können, weil hieraus hervorgehen würde, dafs die Eckpunkte des Simplex in zwei verschiedenen Räumen R_{n-1} lägen. Also findet man, dafs von einander unabhängigen Punkten P von einander unabhängige Räume R_{n-1} entsprechen. Bestimmen nun weiter die Punkte $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(m)}$ den Raum R_{m-1}, so haben die entsprechenden Räume $R^{(1)}_{n-1}$, $R^{(2)}_{n-1}$, ... $R^{(m)}_{n-1}$ deshalb einen Raum R_{n-m} mit einander gemein, und mufs der irgend einem Punkte P von R_{n-m} zugeordnete Raum R_{n-1} die Punkte $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(m)}$ und also den Raum R_{m-1} enthalten; woraus umgekehrt folgt, dafs jedem Punkte von R_{m-1} ein durch R_{n-m} hindurchgehender Raum R_{n-1} zugeordnet ist. Also gilt der Satz:

Den Punkten, Geraden, Ebenen, Räumen, ... Räumen R_{n-4}, R_{n-3}, R_{n-2}, R_{n-1} des Raumes R_n entsprechen in der Orthogonalitätsverwandtschaft bestimmte Räume R_{n-1}, R_{n-2}, R_{n-3}, R_{n-4}, ... Räume, Ebenen, Geraden, Punkte des nämlichen Raumes R_n in doppelter Weise; d. h. wenn R_{m-1} und R_{n-m} einander entsprechende Räume sind, so entspricht einem R_{m-p-1} in R_{m-1} ein R_{n-m+p} durch R_{n-m} und einem R_{m+q-1} durch R_{m-1} ein R_{n-m-q} in R_{n-m}.

Die analytische Darstellung der Orthogonalitätsverwandtschaft gestaltet sich sehr einfach, wenn man das Centrum O der Verwandtschaft zum Ursprunge eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählt. Man hat nämlich zunächst den Satz:

Der Punkt mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ und der Raum R_{n-1} mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ entsprechen einander in der Orthogonalitätsverwandtschaft mit O als Centrum und der negativen Einheit als Potenz.

Wir bemerken sogleich, dafs das aus O auf den gegebenen Raum R_{n-1} gefällte Lot den gegebenen Punkt enthält, wie aus der Gleichung dieses Raumes und den hieraus abgeleiteten Gleichungen des Lotes unmittelbar hervorgeht.

Digitized by Google

Und weiter weisen wir darauf hin, dafs der Abstand von O' zum gegebenen Punkte durch $\sqrt{\Sigma x_i^2}$, der Abstand von O zum gegebenen Raume R_{n-1} durch $\frac{1}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}$ ausgedrückt wird und beide Abstände in entgegengesetzten Richtungen verlaufen.

Aus dem letzten Satze geht nun sofort hervor, dafs man eine Orthogonalitätsverwandtschaft mit dem Centrum O und der Potenz p erhält, wenn man dem Raume R_{n-1} mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ den Punkt mit den Koordinaten $(-px_1, -px_2, \ldots -px_n)$ zuordnet.

Offenbar stehen die einander in der Orthogonalitätsverwandtschaft zugeordneten Elemente einander gegenüber wie das Prinzip der Dualität es verlangt; deshalb haben wir diese ganz besondere Verwandtschaft absichtlich hervorgehoben, weil sie eine äufserst einfache Verwirklichung des von jetzt an unentbehrlichen Dualitätsgesetzes vorführt. Allein wir fügen sofort hinzu, dafs die Orthogonalitätsverwandtschaft bei weitem nicht die allgemeinste Verwandtschaft ist, bei welcher das Prinzip der Dualität zur Geltung kommt; von dieser allgemeinsten Verwandtschaft wird erst später die Rede sein können. Dabei wird dann auch gezeigt werden, welche besondere Eigenschaften die Orthogonalitätsverwandtschaft kennzeichnen.

Ist die Potenz der Orthogonalitätsverwandtschaft positiv, so giebt es Punkte, welche in den ihnen zugeordneten Räumen R_{n-1} liegen, nämlich alle Punkte, deren Abstand von O der Quadratwurzel aus der Potenz gleich ist. Der Kugelraum (69), welcher den Ort dieser Punkte bildet, wird später untersucht werden.

Aufgabe 208. Zeige, wie die Orthogonalitätsverwandtschaft imstande ist, in der darstellenden Geometrie des Raumes R_n die Darstellung des Punktes mittels Projektionen auf Achsen, Projektionsebenen, ... Projektionsräume R_{n-1} in die Darstellung des Raumes R_{n-1} mittels Spuren mit Projektionsräumen R_{n-1}, Projektionsräumen R_{n-2}, ... Achsen umzubilden, und dehne diese Betrachtungen auf die Darstellung von Geraden und Räumen R_{n-2}, von Ebenen und Räumen R_{n-3}, u. s. w. aus.

Digitized by Google

[Entsprechen sich der Punkt P' und der Raum R'_{n-1} in irgend einer Orthogonalitätsverwandtschaft mit O als Centrum, so entspricht dem P' auf OX_i projizierenden Raume R_{n-1} die Spur von R'_{n-1} auf OX_i, u. s. w.]

Aufgabe 209. Gieb die den Aufgaben 124, 125, 128, 129, 132 im R_4 dual gegenüberstehenden Aufgaben an und füge die Lösungen der neuen Aufgaben hinzu.

Aufgabe 210. Welche Bedeutung haben die zwei Gleichungssysteme der Aufgabe 195, wenn man die fünf Gröfsen x_i als Raumkoordinaten von Räumen im R_4 betrachtet? Und wie lauten die den in den Aufgaben 196 und 197 enthaltenen Sätzen dual gegenüberstehenden Sätze?

Aufgabe 211. Es sind $x_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots 6)$ die Gleichungen von sechs Räumen R_3 im R_4, von welchen keine fünf durch den nämlichen Punkt gehen, in überzähligen Koordinaten[85] mit der Bedingung $\sum_1^6 x_i = 0$. Man betrachtet nun die fünfzehn Diagonalräume $x_1 + x_2 = 0, \ldots, x_5 + x_6 = 0$, welche die Schnittebenen $\varepsilon_{12}, \ldots \varepsilon_{56}$ der Räumenpaare $(x_1 = 0, x_2 = 0), \ldots (x_5 = 0, x_6 = 0)$ mit den gegenüberliegenden Punkten $(x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0), \ldots (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0)$ verbinden, und besonders die fünfzehn Schnittebenen $\varepsilon_{12,\,34,\,56}$ der Tripel $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$ dieser Räume, von welchen der dritte wegen der Bedingung $\sum_1^6 x_i = 0$ wirklich durch die den beiden anderen gemeinsame Ebene hindurchgeht. Zu beweisen, dass diese Ebenen sich nach dem Schema

———	(12,34,56)	(13,25,46)	(14,26,35)	(15,24,36)	(16,23,45)
(12,34,56)	———	(16,24,35)	(15,23,46)	(13,26,45)	(14,25,36)
(13,25,46)	(16,24,35)	———	(12,36,45)	(14,23,56)	(15,26,34)
(14,26,35)	(15,23,46)	(12,36,45)	———	(16,25,34)	(13,24,56)
(15,24,36)	(13,26,45)	(14,23,56)	(16,25,34)	———	(12,35,46)
(16,23,45)	(14,25,36)	(15,26,34)	(13,24,56)	(12,35,46)	———

wo (12, 34, 56) für $\varepsilon_{12,\,34,\,56}$ gesetzt worden ist, nach Castelnuovo derart in einer symmetrischen Determinante mit verschwindender Hauptdiagonale ordnen lassen, dass die fünf Ebenen irgend einer Reihe oder Kolonne — zu deren

Digitized by Google

Bildung die fünfzehn Diagonalräume alle mitwirken — allemal fünf einander im Segre'schen Sinne — vergleiche Aufgabe 197 — zugeordnete Ebenen bilden.

Aufgabe 212. Beweise, dafs der Raum R_n, nach der den Aufgaben 2—6, 9—16, 59, 60 zu Grunde liegenden Voraussetzung, die Gerade enthalte $m+1$ Punkte, $\frac{m^{n+1}-1}{m-1}$ Räume R_{n-1} enthält.

[Nach dem Prinzipe der Dualität ist die Zahl der Räume R_{n-1} von R_n der Zahl der Punkte von R_n gleich.]

Aufgabe 213. Beweise, dass m^n dieser $\frac{m^{n+1}-1}{m-1}$ Räume R_{n-1} nicht durch einen gegebenen Punkt P gehen.

[Jeder durch P gehende Raum R_{n-1} schneidet irgend einen nicht durch P hindurchgehenden R_{n-1} in einem R_{n-2}; deshalb ist die Anzahl der durch P gehenden Räume R_{n-1} nach dem Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe $\frac{m^n-1}{m-1}$, u. s. w.]

Aufgabe 214. Ist $A_{(n,p)}$ die Anzahl der im R_n enthaltenen Räume R_p, so gilt die allgemeine Rekursionsformel

$$A_{(q,\,r)} = A_{(q-1,\,r-1)} + m^{r+1} A_{(q-1,\,r)}.$$

Man wünscht den Beweis.

[Diese Beziehung wird gefunden, indem man das System der in R_q enthaltenen R_r zerlegt in zwei Gruppen, nämlich, wenn P irgend ein Punkt von R_q ist, in die Gruppe der durch P hindurchgehenden und die Gruppe der P nicht enthaltenden R_r von R_q. Die Anzahl der Individuen der ersten Gruppe ist dann $A_{(q-1,\,r-1)}$, weil jedes von ihnen irgend einen nicht durch P gehenden R_{q-1} von R_q in einem R_{r-1} schneidet. Und jeder nicht durch P gehende R_r von R_q bestimmt mit P einen R_{r+1} von R_q, welcher nach dem Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe m^{r+1} nicht durch P gehende R_r von R_q enthält und den oben angenommenen nicht durch P gehenden R_{q-1} von R_q in einem R_r schneidet, u. s. w.]

Aufgabe 215. Beweise, dafs für die Anzahl $A_{(n,\,p)}$ der im R_n enthaltenen Räume R_p gefunden wird:

Digitized by Google

$$A_{(n,p)} = \frac{(m^n \pm 1)\,(m^n - 1)\,(m^{n-1} \pm 1)\ldots(m^{n-p} \pm 1)}{(m^p \pm 1)\,(m^p - 1)\,(m^{p-1} \pm 1)\ldots(m-1)}.$$

[Die Rekursionsformel der vorhergehenden Aufgabe gestattet alle $A_{(q,r)}$ zu berechnen, wenn alle $A_{(q,r-1)}$ bekannt sind; denn $A_{(r,r)} = 1$. Da nun $A_{(q,0)}$ nach Aufgabe 14 bekannt ist, so kann man $A_{(n,p)}$ berechnen. Man sieht aber unmittelbar, dafs der angegebene Ausdruck der Rekursionsformel Genüge leistet und aufserdem für $A_{(r,r)}$ und $A_{(q,0)}$ die gefundenen Werte liefert, u. s. w.]

Aufgabe 216. Wieviel uneigentliche Räume U_p enthält R_n?

99. **Die allgemeinste kollineare Verwandtschaft. Perspektivität.** Zwischen den Räumen R_m und R'_m von der nämlichen Dimensionenzahl m besteht eine Verwandtschaft (p, p'), wenn die Punkte P von R_m und P' von R'_m einander derart entsprechen, dafs einem willkürlichen Punkte P von R_m p' Punkte P' von R'_m, und einem willkürlichen Punkte P' von R'_m p Punkte P von R_m zugeordnet sind. Sind die Zahlen p, p' beide der Einheit gleich, so nennt man die Verwandtschaft *eindeutig*. Und diese eindeutige Verwandtschaft wird eine *kollineare* genannt, sobald sie aufserdem die Eigenschaft besitzt, linearen Gebilden von Punkten P allemal wieder lineare Gebilde von Punkten P' zuzuordnen, in welchem Falle zu gleicher Zeit zu linearen Gebilden von Punkten P' allemal wieder lineare Gebilde von Punkten P gehören. Man sieht unmittelbar ein, dafs dieses wechselseitige Verhältnis bei zwei eindeutig verwandten Räumen R_m, R'_m eintritt, wenn jeder willkürlichen Gerade g von R_m wieder eine Gerade g' von R'_m entspricht. Denn unter dieser Voraussetzung entspricht einem Raume R_{m_1} im R_m ein Gebilde mit m_1 Dimensionen im R'_m, welches die Verbindungslinie irgend zweier seiner Punkte enthalten und also ebenfalls linear sein mufs.

Der *Existenzbeweis* kollinear verwandter Systeme kann geometrisch und analytisch geführt werden. Am schnellsten kommt man allerdings mit der Analysis zum Ziele. Es lassen nämlich die allgemeinen, einer Transformation homogener Koordinaten[84] entsprechenden Formelgruppen 52) und 53) eine zweite Deutung zu. Anstatt wie oben

Digitized by Google

anzunehmen, dafs die Veränderlichen t_i und t'_i die mit verschiedenen Simplexen in Verbindung stehenden Koordinaten eines *nämlichen* Punktes sind, kann man voraussetzen die Gröfsen t_i und t'_i seien die Koordinaten zweier *verschiedener* Punkte P und P' von R_n und R'_n in Bezug auf irgend zwei in R_n und R'_n angenommene Koordinatensysteme, — wobei man dann den Index n von R_n und R'_n sowie in den Formeln durch den hier verwendeten m ersetzt. Dann ordnen die Formeln 52) und 53) die Punkte P von R_m und P' von R'_m einander derart eindeutig zu, dafs irgend einem linearen Orte von Punkten P ein ebenfalls linearer Ort von Punkten P' entspricht; d. h. die neue Deutung der Transformationsformeln führt zum analytischen Ausdruck der Kollineation.

Der einfachste geometrische Existenzbeweis kann in folgende Form gegossen werden. Denkt man sich zuerst zwei Räume R_m, R'_m, die einen Raum R_{m-1} gemein haben und also einen sie enthaltenden Raum R_{m+1} bestimmen, und nimmt man in diesem R_{m+1} aufserhalb R_m und R'_m den Punkt O beliebig an, so kann man jedem Punkte P von R_m den Schnittpunkt P' von R'_m und OP zuordnen, was zur Folge hat, dafs dann auch umgekehrt jedem Punkte P' von R'_m der Schnittpunkt P von R_m und OP' zugeordnet wird. Hierdurch sind dann wieder die Punkte P von R_m und P' von R'_m einander in der Weise zugeordnet, wie es die Kollineation verlangt. Und bewegt man nun den als ein starres Punktsystem betrachteten Raum R'_m mit seinen Punkten P' auf irgend eine Weise im R_n, so wird zwar die besondere Lage von R'_m rücksichtlich R_m verschwinden, die kollineare Verwandtschaft zwischen den Punkten P von R_m und den Punkten P' der Endlage von R'_m jedoch bestehen bleiben.

Man sagt, dafs zwei kollineare Räume R_m, R'_m sich *in perspektiver Lage* befinden, wenn die Verbindungsgeraden PP' der einander entsprechenden Punkte P, P' alle durch den nämlichen Punkt O gehen. Dazu ist dann offenbar notwendig, dafs die Räume (O, R_m) und (O, R'_m) zusammenfallen, d. h. R_m und R'_m sich in einem R_{m-1} durchdringen und O wie oben ein aufserhalb R_m und R'_m liegender Punkt des durch R_m und R'_m bestimmten Raumes R_{m+1} sei; der Raum R_{m-1}, welcher der Ort ist der sich selbst zugeordneten

Digitized by Google

Punkte, möge dann der *perspektive Durchschnitt* der Systeme heifsen.

Bei der zuletzt erwähnten geometrischen Erzeugung zweier kollinearer Räume R_m, R'_m treten hauptsächlich zwei Fragen in den Vordergrund. Zuerst möchten wir nämlich wissen, ob die geometrisch erzeugte Kollineation die allgemeinste ihrer Art ist, d. h. ob es möglich ist, irgend zwei kollineare Räume R_m, R'_m durch Bewegung in perspektive Lage zu bringen. Bedenken wir, dafs dies für $m = 2$ in der That, für $m = 3$ aber schon nicht mehr der Fall ist, so wird diese Frage wohl verneint werden müssen. Und zweitens möchten wir untersuchen — in Verbindung mit dem unmittelbar einleuchtenden Satze, dass zwei Räume R_m und R'_m kollinear verwandt sind, wenn sie einzeln zu einem dritten Raume R''_m in dieser Beziehung stehen und man die einem nämlichen Punkte P'' von R''_m entsprechenden Punkte P und P' von R_m und R'_m einander zuordnet —, ob vielleicht irgend zwei gegebene kollineare Räume R_m, R'_m immer zu betrachten sind als erstes und letztes Glied einer Kette $R_m, R^{(1)}_m, R^{(2)}_m, \ldots R^{(k)}_m, R'_m$ von Räumen mit m Dimensionen, von welcher jedes intermediäre Glied $R^{(p)}_m$, $(p = 1, 2, \ldots k)$ perspektiv liegt mit den beiden unmittelbar benachbarten Gliedern. Wir kommen nachher auf diese beiden Fragen zurück.

Die kollineare Verwandtschaft zweier Räume R_m, R'_m ordnet nicht nur jedem Punkte P von R_m einen Punkt P' von R'_m zu, sondern auch jedem linearen Gebilde von R_m ein lineares Gebilde der nämlichen Art von R'_m, insbesondere jedem R_{m-1} von R_m einen R'_{m-1} von R'_m. Wirklich kann man zur analytischen Bestimmung der Kollineation ebenso gut von den Gleichungen 54) und 55) in Raumkoordinaten wie von den Gleichungen 52) und 53) in Punktkoordinaten ausgehen.

100. **Erweiterung des Kollineationsbegriffes.** Die Entwickelungen über centrale Projektion[68a] erlauben uns unsere Begriffe über kollineare Verwandtschaft vom besonderen Falle der perspektiven Lage aus bedeutend zu erweitern. Wir werden dabei Gelegenheit finden, für eine allgemeine Kategorie von Gebilden, welche wir früher[78a, 82a] „lineare Systeme“ nannten, einen neuen Namen einzuführen.

Digitized by Google

Ist im R_n ein Raum R_m und aufserhalb dieses Raumes ein Punkt O gegeben, so kann man jedem Punkte P von R_m die diesen Punkt mit O verbindende Gerade g zuordnen. Hierdurch erzeugt man eine spezielle eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten P des Raumes R_m und den durch O gehenden Geraden g des durch O und R_m bestimmten Raumes R_{m+1}, welche ebenfalls als eine perspektive kollineare Verwandtschaft gedeutet werden kann. Wir erinnern daran, dafs wir schon die Behandlung der unendlich fernen Punkte dem allgemeinen Verständnis näher zu bringen versucht haben, indem wir die Punkte von U_n mit Hilfe der sie mit einem eigentlichen Punkte O verbindenden Geraden darstellten[20].

Offenbar kann man, diesen Weg weiter verfolgend, im R_n zwei zu einander windschiefe Räume R_m, R_{p-1} annehmen und nun jedem Punkte P von R_m den diesen Punkt mit R_{p-1} verbindenden Raum R_p zuordnen, wodurch man eine perspektive kollineare Verwandtschaft zwischen den Punkten P von R_m und den durch R_{p-1} gehenden Räumen R_p des durch R_{p-1} und R_m bestimmten Raumes R_{m+p} erzeugt. Wir bezeichnen das letzte Gebilde mit dem Symbol $S_{p,m}$, wo S eine Abkürzung des Namens *Stern* ist, p die Dimensionenzahl der Elemente angiebt und m auf den Unendlichkeitsgrad des Gebildes in diesen Elementen schliefsen läfst. Ferner möge der den Elementen gemeinschaftliche Raum R_{p-1} der *Kern*, der von den Elementen erfüllte Raum R_{m+p} der *Träger* des Sternes heifsen. Also ist $S_{1,1}$ ein Strahlenbüschel, $S_{2,1}$ ein Ebenenbüschel, $S_{1,2}$ ein Strahlenbündel, $S_{2,2}$ ein Ebenenbündel in R_4, d. h. alle durch eine Gerade gehenden Ebenen, welche einen R_4 ausfüllen, u. s. w. Aus diesen Beispielen geht schon hervor, dafs ein Stern $S_{p,m}$ bestimmt ist, sobald man seinen Träger R_{m+p} und seinen in diesem enthaltenen Kern R_{p-1} kennt, dafs also der bei obiger Erzeugung verwendete Raum R_m durch irgend einen zu R_{p-1} windschiefen Raum R_m von R_{m+p} ersetzt werden kann. Wir bemerken noch, dafs $S_{0,m}$ nicht von R_m verschieden ist und die Räume R_m sich also den Sternen unterordnen, dafs aber der Ebenenbündel im Raume nicht zu obigen Sternen gerechnet werden kann, da die Ebenen dieses Bündels keine Gerade, sondern nur einen Punkt mit einander gemein haben. Auf diese Ausnahme kommen wir sofort zurück.

Digitized by Google

Man steigt nun leicht zur Definition des allgemeinsten Paares perspektiver kollinearer Sterne S empor, indem man in R_n drei zu einander windschiefe Räume R_m, R_{p-1}, R_{q-1} annimmt und nun die R_{p-1} und R_{q-1} mit dem nämlichen Punkte P von R_m verbindenden Räume R_p und R_q einander zuordnet. Man erhält so zwei perspektive kollineare Sterne $S_{p,m}$ und $S_{q,m}$, von welchen R_{p-1} und R_{q-1} die Kerne und die Räume $R_{m+p} = (R_m, R_{p-1})$ und $R_{m+q} = (R_m, R_{q-1})$ die Träger sind; das die Perspektivität festlegende Verbindungsglied R_m möge wieder der *perspektive Durchschnitt* beider Sterne heifsen.

Es ist lehrreich, auf die letzten Betrachtungen das Gesetz der Dualität anzuwenden. Dabei wird man dann sofort von der Gesamtheit aller Räume R_p in einem gegebenen Raume R_{m+p} durch einen in diesem R_{m+p} gegebenen Raum R_{p-1} zu der Gesamtheit aller Räume R_{n-p-1} in einem gegebenen Raume R_{n-p} durch einen in diesem R_{n-p} gegebenen Raum $R_{n-m-p-1}$ geführt, was auf eine Verallgemeinerung des oben eingeführten Begriffes des Sternes hinausläuft. Dieses neue Gebilde, welchem wir hier auch den Namen Stern beilegen wollen, möge durch das Symbol $\Sigma_{n-p-1,m}$ gekennzeichnet werden, wo der erste Index wieder die Dimensionenzahl der Elemente, der zweite wieder den Unendlichkeitsgrad des Gebildes in diesen Elementen erkennen läfst. Vom Sterne $\Sigma_{n-p-1,m}$ ist dann ein Raum $R_{n-m-p-1}$ der Kern, ein Raum R_{n-p} der Träger. Es ist dann $\Sigma_{1,1}$ ein Strahlenbüschel, $\Sigma_{2,1}$ ein Ebenenbüschel, $\Sigma_{1,2}$ die Ebene als Träger der in ihr enthaltenen Geraden, $\Sigma_{2,2}$ ein Ebenenbündel, u. s. w. und allgemein $\Sigma_{m,m+1}$ ein Raum R_{m+1} als Träger der in ihm enthaltenen Räume R_m. Der Unterschied zwischen den beiden Arten S und Σ von Sternen besteht also hierin, dafs bei den Sternen S die Dimensionenzahl des Kerns um eine Einheit niedriger, bei den Sternen Σ die Dimensionenzahl des Trägers um eine Einheit höher ist als die Dimensionenzahl der Elemente. Es ist also der Ebenenbündel im Raume nur ein Stern Σ und ebenso das Punktfeld der Ebene nur ein Stern S. Und ebenso wie die Sterne S werden auch die Sterne Σ durch Träger und Kern bestimmt.

Aufgabe 217. Wie stehen sich die Sterne S und Σ als „lineare Systeme“ gegenüber?

Digitized by Google

[Wie lineare Systeme von linearen Örtern von Punkten[78s] und lineare Systeme von linearen „Einhüllenden“ von Räumen[82s].]

Man erhält nun auch leicht, entweder mit Hilfe des Prinzips der Dualität oder auch unmittelbar, das allgemeinste Paar perspektiver kollinearer Sterne Σ. Ausgehend von drei Räumen R_{n-m-1}, R_{n-p}, R_{n-q}, von welchen keine zwei in einem nämlichen Raume R_{n-1} liegen, kann man den Stern $\Sigma_{n-1,m}$ mit dem Kerne R_{n-m-1} und dem Träger R_n mit den Räumen R_{n-p} und R_{n-q} in den Sternen $\Sigma_{n-p-1,m}$ und $\Sigma_{n-q-1,m}$ schneiden, welche Sterne dann perspektiv kollinear genannt werden mögen, weil jedes Paar einander entsprechender Elemente R_{n-p-1}, R_{n-q-1} mit R_{n-m-1} in einem nämlichen Raume R_{n-1} liegt. Die Kerne dieser Sterne Σ sind dann die Schnitträume $R_{n-m-p-1}$, $R_{n-m-q-1}$ von R_{n-m-1} mit R_{n-p}, R_{n-q}, u. s. w.

Bei der Erzeugung des allgemeinsten Paares perspektiver kollinearer Sterne S setzten wir voraus, dafs die Kerne R_{p-1} und R_{q-1} zu einander windschief seien. Ebenso dachten wir uns oben die Träger R_{n-p} und R_{n-q} des allgemeinsten Paares perspektiver kollinearer Sterne Σ nicht in einem nämlichen R_{n-1} liegend. Allein damit soll nicht behauptet werden, dafs es ohne diese einschränkenden Bedingungen keine perspektiven kollinearen Sterne giebt. Im Gegenteil ist unmittelbar einleuchtend, dafs für $p < q$ einerseits R_{p-1} sogar in R_{q-1}, andererseits R_{n-q} sogar in R_{n-p} liegen kann, ohne dafs die perspektiven kollinearen Sterne unmöglich werden. In diesen letzten ganz besonderen Fällen nennt man die Sterne *incident*.

Hebt man nun endlich bei zwei perspektiven kollinearen Sternen die perspektive Lage auf, indem man eines dieser Gebilde oder auch beide sich als Ganzes bewegen lässt, so bleibt doch die Kollineation bestehen. Auf diese Kollineation von im allgemeinen verschiedenartigen Elementengruppen wurde im Anfange dieser Nummer hingezielt.

101. **Der allgemeine Satz der kollinearen Zuordnung.** Wir kehren jetzt zu den nicht perspektiven, sondern blofs kollinearen Räumen zurück und beweisen nun geometrisch und analytisch folgenden allgemeinen Satz:

Digitized by Google

Sollen zwei Räume R_m, R'_m kollinear auf einander bezogen werden, so darf man $m+2$ beliebigen Punkten P von R_m, von welchen keine $m+1$ in einem R_{m-1} liegen, irgend $m+2$ derselben Bedingung genügende Punkte P' von R'_m als entsprechende zuordnen; dadurch wird dann jedem Punkte von R_m ein bestimmter Punkt von R'_m zugeordnet.

Der geometrische Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe der Schlufsweise von $p-1$ auf p geführt. Wir setzen also voraus, der Satz gelte schon für $m=p-1$ und zeigen nun, dafs er dann auch für $m=p$ zur Geltung kommt. Dabei werden die Betrachtung des Simplex und der Begriff der Projektion aus Eckpunkten und Kanten uns gute Dienste leisten.

Hat man zur Herstellung einer kollinearen Verwandtschaft zwischen zwei Räumen R_p und R'_p den $p+2$ Punkten $A_1, A_2, \ldots A_{p+1}, B$ von R_p die $p+2$ Punkte $A_1', A'_2, \ldots A'_{p+1}, B'$ von R'_p als entsprechende zugeordnet, wo die zwei Gruppen von $p+2$ Punkten dann so angenommen werden müssen, dafs keine $p+1$ Punkte derselben Gruppe in einem R_{p-1} liegen, so bilden die $p+1$ Punkte A_i die Eckpunkte eines $S(p+1)$ von R_p, die $p+1$ Punkte A'_i die Eckpunkte eines $S'(p+1)$ von R'_p, während die Punkte B, B' in Bezug auf $S(p+1)$, $S'(p+1)$ eine beliebige Lage haben. Wir bestimmen nun die Projektionen B_i von B aus A_i auf die gegenüberliegenden Räume $R^{(i)}_{p-1}$ von $S(p+1)$ und die Projektionen B'_i von B' aus A'_i auf die gegenüberliegenden Räume $R'^{(i)}_{p-1}$ von $S'(p+1)$, und stellen sodann, in der Voraussetzung der in Rede stehende Satz sei schon für $m=p-1$ bewiesen, zwischen den Paaren gleichnamiger Räume $R^{(i)}_{p-1}$, $R'^{(i)}_{p-1}$ von $S(p+1)$, $S'(p+1)$ eine kollineare Verwandtschaft her, indem wir den p Punkten A und dem Punkte B_i von $R^{(i)}_{p-1}$ die gleichnamigen Punkte A' und den Punkt B'_i von $R'^{(i)}_{p-1}$ als entsprechende zuordnen. Dies ist dann wirklich möglich; denn die Punkte B_i und B'_i haben in Bezug auf das $S(p)$ der Punkte A in $R^{(i)}_{p-1}$ und das $S'(p)$ der Punkte A' in $R'^{(i)}_{p-1}$ willkürliche Lage, weil dasselbe mit B und B' in Bezug auf $S(p+1)$ und $S'(p+1)$ der Fall ist. Und nun haben diese $p+1$ Verwandtschaften, welche wir als W_i bezeichnen, die Eigen-

Digitized by Google

schaft, dafs je zwei von ihnen im ihnen gemeinschaftlichen Gebiete identisch sind. Bedenkt man nämlich, dafs z. B. die Verwandtschaften W_1 und W_2 durch die Paare entsprechender Punkte der Diagramme

$$W_1 \cdot\cdot \frac{R^{(1)}_{p-1}}{R'^{(1)}_{p-1}} \left\| \frac{B_1 | A_2 | A_3 | \ldots | A_{p+1}}{B'_1 | A'_2 | A'_3 | \ldots | A'_{p+1}} \right., \quad W_2 \cdot\cdot \frac{R^{(2)}_{p-1}}{R'^{(2)}_{p-1}} \left\| \frac{A_1 | B_2 | A_3 | \ldots | A_{p+1}}{A'_1 | B'_2 | A'_3 | \ldots | A'_{p+1}} \right.$$

bestimmt werden, so ergiebt sich unmittelbar, dafs diese Verwandtschaften zwischen dem Schnittraume $R^{(1,2)}_{p-2}$ von $R^{(1)}_{p-1}$, $R^{(2)}_{p-1}$ und dem Schnittraume $R'^{(1,2)}_{p-2}$ von $R'^{(1)}_{p-1}$, $R'^{(2)}_{p-1}$ die Verwandtschaft

$$W_{1,2} \cdot\cdot\cdot\cdot \frac{B_{1,2} | A_3 | A_4 | \ldots\ldots | A_{p+1}}{B'_{1,2} | A'_3 | A'_4 | \ldots\ldots | A'_{p+1}}$$

bestimmen. Denn in W_1 entsprechen sich der Schnittpunkt der Gerade $B_1 A_2$ mit dem durch A_3, A_4, $\ldots$ A_{p+1} bestimmten Raume $R^{(1,2)}_{p-2}$ und der Schnittpunkt der Gerade $B'_1 A'_2$ mit dem durch A'_3, A'_4, $\ldots$ A'_{p+1} bestimmten Raume $R'^{(1,2)}_{p-2}$, d. h.[68] $B_{1,2}$ und $B'_{1,2}$, u. s. w.

Hiermit sind alle Vorbereitungen zur Anwendung der Schlufsweise von $m = p-1$ auf $m = p$ getroffen. Wirklich zeigen wir jetzt leicht mit Hilfe der $p+1$ mit einander im Einklange stehenden Verwandtschaften W_i, dafs die Punkte P von R_p und P' von R'_p sich eindeutig entsprechen, und die eindeutige Verwandtschaft dieser Punkte eine kollineare ist. Projizieren wir nämlich den willkürlich angenommenen Punkt P von R_p aus den Punkten A_i auf die Räume $R^{(i)}_{p-1}$, und bestimmen in den Räumen $R'^{(i)}_{p-1}$ die diesen Projektionen P_i entsprechenden Punkte P'_i, so ergiebt sich, dafs die $p+1$ Geraden $A'_i P'_i$ zu je zweien einen Punkt gemein haben, und also entweder durch einen nämlichen Punkt P' gehen, oder aber in einer nämlichen Ebene ε' liegen. Allein die letztere Voraussetzung ist hier ausgeschlossen, denn die Punkte A'_i liegen nicht in einer nämlichen Ebene. Also wird bewiesen sein, dafs die $p+1$ Geraden $A'_i P'_i$ einen Punkt P' gemein haben, sobald gezeigt worden ist, dafs je zwei von ihnen sich schneiden. Nun schneiden sich aber die Geraden $A'_i P'_i$, $A'_k P'_k$, weil es die Geraden $A_i P_i$, $A_k P_k$ thun. Denn,

Digitized by Google

weil $A_i P_i$, $A_k P_k$ sich in P schneiden, so haben $A_i P_k$, $A_k P_i$ (Fig. 59) den Punkt $P_{i,k}$ gemein, woraus hervorgeht, dafs $A' P'_k$, $A'_k P'_i$ den $P_{i,k}$ entsprechenden Punkt $P'_{i,k}$ gemein haben müssen, weil nämlich W_i und W_k sich in der nämlichen $W_{i,k}$ durchdringen. Und wenn $A'_i P'_k$, $A'_k P'_i$ sich begegnen, so thun $A'_i P'_i$, $A'_k P'_k$ dies auch. Also kann der den $p+1$ Geraden $A'_i P'_i$ gemeinschaftliche Punkt P' dem beliebig gewählten Punkte P zugeordnet werden, wodurch dann offenbar eine eindeutige Verwandtschaft erzeugt ist, weil es nun auch ersichtlich ist, dafs umgekehrt dem Punkte P' von R'_p nur der Punkt P von R_p entspricht. Endlich ist diese Verwandtschaft auch eine kollineare. Denn die Punkte P einer Gerade g von R_p projizieren sich aus $A_i A_k$ auf $R^{(i,k)}_{p-2}$ als Punkte $P_{i,k}$ einer Gerade $g_{i,k}$, welchen Punkten in $R'^{(i,k)}_{p-2}$ Punkte $P'_{i,k}$ einer Gerade $g'_{i,k}$ zugeordnet sind; d. h. die den Punkten P einer Gerade g entsprechenden Punkte P' liegen mit jeder der Kanten $A'_i A'_k$ vom $S'(p+1)$ in einem Raume und also auf einer Gerade g'. Wir finden deshalb, dafs der zu beweisende Satz für $m = p$ gilt, wenn er für $m = p-1$ bewiesen ist; weil er für $m = 3$ gilt, so gilt er allgemein.

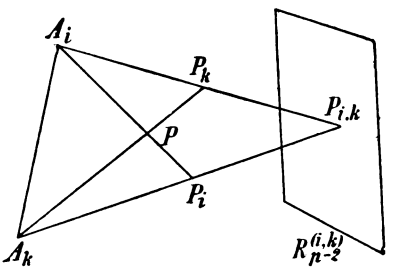


Fig. 59.

Man hat nun auch folgenden Satz:

Werden die Räume $R^{(1)}_{m-1}$, $R^{(2)}_{m-1}$ von R_m derart kollinear bezogen auf die Räume $R'^{(1)}_{m-1}$, $R'^{(2)}_{m-1}$ von R'_m, dafs die Verwandtschaften $W_1 = [R^{(1)}_{m-1}, R'^{(1)}_{m-1}]$ und $W_2 = [R^{(2)}_{m-1}, R'^{(2)}_{m-1}]$ in dem gemeinschaftlichen Gebiete die nämliche Verwandtschaft $W_{1,2} = [R^{(1,2)}_{m-2}, R'^{(1,2)}_{m-2}]$ hervorrufen, so ist hiermit zu gleicher Zeit eine kollineare Verwandtschaft W zwischen den Räumen R_m, R'_m erzeugt.

Der viel einfachere analytische Beweis des Hauptsatzes der kollinearen Verwandtschaft knüpft sich leicht an eine der beiden Formelgruppen 52) und 53) an. Denkt man

Digitized by Google

sich, wie beim analytischen Existenzbeweise[99a], die Verwandtschaft durch die sich auf zwei in R_m und R'_m ganz beliebig angenommene Koordinatensysteme beziehenden Gleichungen 52) erzeugt, — wo n wieder durch m ersetzt werden soll —, so liefert die mehrfache Bedingung, dafs einem gegebenen Punkte A von R_m ein bestimmter Punkt A' von R'_m entsprechen soll, $m+1$ lineare Bedingungen zwischen den Verhältnissen der $(m+1)^2$ Koeffizienten $b_{i,k}$ zu σ, d. h. m lineare Bedingungen zwischen den $(m+1)^2-1$ oder $m(m+2)$ von einander unabhängigen Verhältnissen der Koeffizienten $b_{i,k}$ unter sich. Also kann man $m+2$ gegebenen Punkten von R_m, von welchen keine $m+1$ im nämlichen R_{m-1} liegen, $m+2$ willkürlich gewählte Punkte von R'_m mit der nämlichen Eigenschaft als entsprechende zuordnen.

Allein dieser analytische Beweis läfst sich noch bedeutend einfacher gestalten. Offenbar erzeugt man nämlich eine kollineare Verwandtschaft zwischen den Räumen R_m und R'_m, wenn man in jedem dieser Räume ein homogenes Koordinatensystem annimmt und nun einfach die Punkte mit gleichen Koordinatenverhältnissen einander entsprechen läfst. Und dann hat man thatsächlich den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots A_{m+1}$ des Simplex und dem Einheitspunkte A_{m+2} des Koordinatensystems im R_m die entsprechenden Eckpunkte $A'_1, A'_2, \ldots A'_{m+1}$ und den Einheitspunkt A'_{m+2} des Koordinatensystems im R'_m zugeordnet. Denn bei solcher Zuordnung vereinfacht sich das Gleichungssystem 52) zu $\sigma t'_i = t_i$.

Mit Hilfe des ersten allgemeinen Satzes dieser Nummer führen wir nun die zweite der oben[99a] gestellten zwei Fragen ihrer Antwort entgegen, indem wir nun zeigen, dafs irgend zwei kollinear auf einander bezogene Räume R_m, R'_m, deren Verwandtschaft mittels der zwei Gruppen A_i und B_i, $(i = 1, 2, \ldots m+2)$ von Punkten bestimmt ist, wirklich zu betrachten sind als erstes und letztes Glied einer Kette von Räumen, von welcher jedes intermediäre Glied perspektiv liegt mit den beiden unmittelbar benachbarten Gliedern, sobald dies bewiesen ist für den speziellen Fall zweier kollinear verwandter Systeme eines nämlichen Raumes R_m, welche $m+1$ diesen Raum bestimmende, sich selbst entsprechende Punkte besitzen. Dazu betrachten wir, uns auf den Fall $m = 4$ beschränkend, die durch die Zuordnung folgender Punktsextupel bestimmte Kette von kollinearen Räumen R_4

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
R_4 \ldots & (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6), \\
R_4' \ldots & (C_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_6), \\
. & (D_1, A_2, A_3, A_4, B_5, B_6), \\
. & (E_1, A_2, A_3, B_4, B_5, B_6), \\
. & (F_1, A_2, B_3, B_4, B_5, B_6), \\
R_4' \ldots & (G_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6),
\end{array}
$$

wo die neuen Punkte $C_1, D_1, \ldots G_1$ jedesmal so angenommen worden sind, dafs sie die perspektive Lage zweier Nachbarräume verwirklichen, d. h. wo C_1 so gewählt ist, dafs die Gerade $C_1 B_6$ durch den Schnittpunkt P der Gerade $A_1 A_6$ mit dem Raume $R_3 = (A_2 A_3 A_4 A_5)$ geht, u. s. w. Und dafs für die im nämlichen Raume R_4' liegenden Systeme $(G_1, B_2, \ldots B_6), (B_1, B_2, \ldots B_6)$ der in Rede stehende Satz gilt, wird bald[107] leicht gefunden werden.

102. **Kollineare Systeme und incidente Räume.** Sind im Raume drei zu einander windschiefe Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben und ordnet man diejenigen Punkte P_1, P_2 von g_1, g_2 einander als entsprechende zu, welche in der nämlichen Ebene ε durch g_3 liegen, so sind die Punktreihen P_1, P_2 auf g_1, g_2 bekanntlich projektiv verwandt, weil jede von ihnen mit dem Büschel der Ebenen ε um g_3 in perspektiver Lage ist; d. h. die gemeinschaftlichen Transversalen der drei Geraden g_1, g_2, g_3 schneiden in diesen Geraden projektive Punktreihen ein. Wie aus den einfachsten Eigenschaften des Ortes dieser Transversalen bekannt ist, schneidet das einfach unendliche System dieser Geraden nicht nur in den gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 sondern in einem gleichfalls einfach unendlichen Systeme von Geraden projektive Punktreihen ein; d. h. das einschalige Hyperboloid läfst zwei Systeme von Erzeugenden zu, welche zu einander in dieser doppelten Wechselbeziehung stehen, dafs irgend eine Gerade des einen Systems mit irgend einer Gerade des andern allemal einen Punkt gemein hat und die Geraden des einen Systems auf irgend zwei Geraden des andern projektive Punktreihen bestimmen.

Uns an eine gebräuchliche Bezeichnungsweise anschliefsend, nennen wir irgend zwei Systeme $(R_p), (R_q)$ von Räumen R_p, R_q incident, wenn irgend ein Raum R_p des ersten Systems mit irgend einem Raume R_q des zweiten allemal einen Punkt und weiter nichts als einen Punkt ge-

Digitized by Google

mein hat und der Ort der Räume R_p mit dem Orte der Räume R_q zusammenfällt. Es bilden dann die zwei einander tragenden Regelscharen des einschaligen Hyperboloids das einfachste Beispiel $p = 1$, $q = 1$ zweier incidenter Systeme; hierbei kann man einerseits von drei Leitstrahlen ausgehen und mit Hilfe des incidenten Systems der gemeinschaftlichen Transversalen auf diesen drei Geraden projektive Punktreihen erzeugen, andererseits zwei projektiv verwandte Punktreihen als gegeben betrachten und von diesen zu den zwei incidenten Regelscharen aufsteigen.

Aufgabe 218. Bilden zwei Strahlenbüschel mit gemeinschaftlichem Scheitel O, deren Ebenen nur diesen Punkt O mit einander gemein haben, zwei incidente Systeme?

[Gerade in der Absicht, diesen bedeutungslosen Ausnahmefall und andere analoge Fälle, wie jenen der incidenten Sterne[100b], hier auszuschliefsen, ist in der Definition die Beschränkung aufgenommen worden, dafs die beiden Systeme im nicht mehr linearen Orte ihrer Räume übereinstimmen sollen. Aus der so gefafsten Definition geht dann zu gleicher Zeit hervor, dafs durch irgend einen Punkt dieses Ortes ein und auch nur ein Raum von jedem der beiden Systeme geht, dafs irgend zwei Räume des nämlichen Systems also windschief zu einander sind, u. s. w.]

Wir wenden uns jetzt zu immer allgemeineren Fällen und denken uns zunächst im Raume R_5 drei zu einander windschiefe Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ gegeben, wobei jeder Punkt P_3 von ε_3 eine gemeinschaftliche Transversale, die Schnittgerade der beiden Räume (ε_1, P_3), (ε_2, P_3) bestimmt. Offenbar werden die drei Ebenen mittels des zweifach unendlichen Systems dieser Transversalen kollinear auf einander bezogen, wenn man die drei Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 der nämlichen Transversale einander allemal als entsprechende zuordnet. Denn erstens ist die Beziehung zwischen irgend zwei dieser drei Punkte eine eindeutige Verwandtschaft. Und weiter ergiebt sich sofort, dafs den Punkten P_3 irgend einer Gerade g_3 von ε_3 gleichfalls in einer Gerade liegende Punkte P_1 von ε_1 und in einer Gerade liegende Punkte P_2 von ε_2 entsprechen; denn es hat sowohl der vierdimensionale Raum (g_3, ε_2) mit ε_1 als der vierdimensionale Raum (g_3, ε_1) mit ε_2 eine Gerade gemein.

Digitized by Google

Ein besonderer Fall des hier aufgedeckten zweifach unendlichen Systems von Geraden, welches mit drei Ebenen incident ist, ist uns früher schon begegnet, als wir[43] eine Ebene ε auf einen Raum R_4 projizierten; es sind nämlich die dort betrachteten projizierenden Geraden gleichfalls gemeinschaftliche Transversalen dreier Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_\infty$, wo ε die gegebene Ebene, ε' ihre Projektion und ε_∞ die uneigentliche Ebene bedeutet, welche im $\overline{U}_5$ des durch $\varepsilon, \varepsilon'$ bestimmten Raumes R_5 der uneigentlichen Gerade von ε' senkrecht zugeordnet ist. Damals fanden wir auch — vergleiche die Lösung der Aufgabe 79 —, dafs der Ort dieses zweifach unendlichen Transversalensystems von $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_\infty$ ebenfalls als Ort des einfach unendlichen Systems der Ebenen zu deuten ist, welche die von ε und ε' begrenzten Strecken dieser Transversalen im nämlichen Verhältnis teilen. Es liegt also die Vermutung nahe, dafs auch im allgemeineren Falle irgend dreier zu einander windschiefer Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ von R_5 der Ort der Punkte P der gemeinschaftlichen Transversalen $P_1 P_2 P_3$, für welche das Doppelverhältnis $(P_1 P_2 P_3 P)$ einen bestimmten Wert hat, eine Ebene sein wird. Weil irgend zwei gemeinschaftliche Transversalen $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3$ sich kreuzen, ergiebt sich wirklich zunächst, dafs der Ort der Punkte P in Punkteanzahl mit den gegebenen Ebenen übereinstimmt und also zweidimensional ist. Und weiter findet man, dafs diese Fläche die durch irgend zwei ihrer Punkte P, Q bestimmte Gerade enthalten und also linear sein mufs, weil diese Gerade PQ vierter Leitstrahl ist des durch $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ bestimmten einschaligen Hyperboloids, u. s. w. Es stellt sich also, auch in diesem allgemeineren Falle, dem zweifach unendlichen Systeme $(R_1)_2$ von Geraden ein zu ihm incidentes einfach unendliches System $(R_2)_1$ von Ebenen zur Seite, und diese beiden Systeme besitzen dann weiter die Eigenschaft, dafs irgend zwei Elemente des einen Systems durch das andere System projektiv, respektive kollinear auf einander bezogen werden.

Aufgabe 219. Im besonderen Falle der Nr. 43 hatten wir es mit einem hyperbolischen Paraboloid zu thun; weshalb tritt hier das einschalige Hyperboloid an seine Stelle?

Bei irgend zwei incidenten Systemen nennen wir allgemein die Räume des einen Systems Leiträume des

Digitized by Google

andern. Es sind dann im vorhergehenden Falle die Ebenen ε von $(R_2)_1$ Leitebenen für $(R_1)_2$, die Geraden g von $(R_1)_2$ Leitstrahlen für $(R_2)_1$. Es ist dann das System $(R_1)_2$ durch irgend drei seiner Leitebenen, das System $(R_2)_1$ durch irgend vier seiner Leitstrahlen bestimmt; oder aber man erhält das System $(R_1)_2$ mittels zweier kollinear verwandter Leitebenen, das System $(R_2)_1$ mittels dreier projektiv verwandter Leitstrahlen. Durchläuft man nämlich, um die zweite Hälfte der ersten Behauptung zu beweisen, die analoge Gedankenreihe für vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 von R_5, welche derart von einander unabhängig sind, dafs irgend drei derselben diesen R_5 bestimmen, so fällt man bei der Bestimmung der zu diesen vier Geraden incidenten Ebenen auf $(R_2)_1$ zurück. Denn (974) irgend ein Punkt P_4 von g_4 bestimmt mit den Geradenpaaren (g_2, g_3), (g_1, g_3) (g_1, g_2) drei vierdimensionale Räume, welche sich in einer einzigen Ebene durchsetzen, weil sie wegen der Unabhängigkeit der Geraden g_1, g_2, g_3 von einander keinen Raum gemein haben können.

Die einseitige Verallgemeinerung des erhaltenen Resultates führt zu der Betrachtung dreier zu einander windschiefer Räume $R_p^{(1)}$, $R_p^{(2)}$, $R_p^{(3)}$. Mittels analoger Ueberlegungen findet man zunächst ein p-fach unendliches System $(R_1)_p$ gemeinschaftlicher Transversalen und nachher ein einfach unendliches, die drei gegebenen Räume enthaltendes, zu $(R_1)_p$ incidentes System $(R_p)_1$. Ist P_3 nämlich irgend ein Punkt von $R_p^{(3)}$, so ist den Räumen $R_{p+1}^{(1)} = (P_3, R_p^{(1)})$ und $R_{p+1}^{(2)} = (P_3, R_p^{(2)})$ eine Gerade gemeinschaftlich und diese Gerade g, welche mit $R_p^{(1)}$ im $R_{p+1}^{(1)}$ und mit $R_p^{(2)}$ im $R_{p+1}^{(2)}$ liegt, ist gemeinschaftliche Transversale der drei gegebenen Räume. Und der Ort der Punkte P dieser Transversalen $P_1 P_2 P_3$, für welche $(P_1 P_2 P_3 P)$ einen gegebenen Wert hat, hat p Dimensionen wie die gegebenen Räume und ist linear, weil die Verbindungsgerade PQ irgend zweier seiner, von den Transversalen $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$ herrührender Punkte P, Q wegen der Beziehung $(P_1 P_2 P_3 P) = (Q_1 Q_2 Q_3 Q)$ vierter Leitstrahl der durch die Leitstrahlen $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ bestimmten Regelschar ist, deren Erzeugenden offenbar gemeinschaftliche Transversalen der drei gegebenen Räume sind.

Digitized by Google

Es ist das System $(R_1)_p$ wieder durch irgend drei seiner Leiträume R_p, das System $(R_p)_1$ wieder durch irgend $p+2$ seiner Leitstrahlen bestimmt. Und man kann das System $(R_1)_p$ auch mittels zweier kollinear verwandter Leiträume R_p, das System $(R_p)_1$ auch mittels $p+1$ projektiv verwandter Leitstrahlen erzeugen.

Aufgabe 220. Im Raume R_{2p+1} liegen zwei zu einander windschiefe Räume R_p gegeben vor. Wie kann der Ort des p-fach unendlichen Systems der Geraden, welche die Punkte des einen Raumes R_p auf den anderen projizieren, anders gedeutet werden?

103. **Einfachste analytische Darstellung incidenter Raumsysteme.** Wir schreiten jetzt zum allgemeinsten Falle zweier incidenter Systeme und betrachten zu diesem Zwecke $q+2$ sich kreuzende Räume $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}, \ldots R_p^{(q+2)}$, welche derart von einander unabhängig sind, dafs irgend $q+1$ derselben den sie sämtlich enthaltenden, zeitlich als Operationsraum geltenden Raum R_{pq+p+q} von $(q+1)(p+1)-1$ Dimensionen bestimmen. Durch irgend einen Punkt $P^{(q+2)}$ von $R_p^{(q+2)}$ geht dann allemal wieder ein und auch nur ein Raum R_q, welcher zu den $q+2$ gegebenen Räumen R_p incident ist. Es hat nämlich jeder Raum R_q, welcher diesen Bedingungen Genüge leistet, $q+1$ von einander unabhängige Punkte gemein mit dem Raume $R_{q(p+1)}^{(k)}$ durch $P^{(q+2)}$, welcher die gegebenen Räume R_p mit Ausnahme von $R_p^{(k)}$ sämtlich enthält; also mufs jeder dieser Räume R_q im Raume $R_{q(p+1)}^{(k)}$ liegen und deshalb durch den einzigen Schnittpunkt $P^{(k)}$ dieses Raumes $R_{q(p+1)}^{(k)}$ mit $R_p^{(k)}$ hindurchgehen. Weil die $q+1$ Räume $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}, \ldots R_p^{(q+1)}$ ganz unabhängig von einander sind, so geht durch die $q+1$ so erhaltenen Punkte $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(q+1)}$ ein einziger Raum R_q hindurch. Wird nun gezeigt, dafs dieser Raum R_q auch den willkürlich in $R_p^{(q+2)}$ angenommenen Punkt $P^{(q+2)}$ enthält, so ist der zu den incidenten Systemen $(R_q)_p$ und $(R_p)_q$ führende Weg angewiesen. Nun kann man behaupten, dafs der gefundene Raum R_q den Punkt $P^{(q+2)}$ enthalten mufs, weil dieser Punkt der einzige Schnittpunkt der $q+1$ Räume $R_{q(p+1)}^{(k)}$ ist. Allein es empfiehlt sich, beim Beweise dieser Behauptung das homogene

Digitized by Google

Koordinatensystem zu benutzen. Beschränken wir uns dabei zur Vermeidung von Weitläufigkeit auf den besonderen Fall $p = 3$, $q = 2$, wo in einem Raume R_{11} drei diesen Raum bestimmende Räume $R_3^{(1)}$, $R_3^{(2)}$, $R_3^{(3)}$ und irgend ein Punkt $P^{(4)}$ gegeben vorliegen, so kann das erste, das zweite und das dritte Quadrupel der zwölf Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots P_{12}$ des Koordinatensimplex der Reihe nach in $R_3^{(1)}$, $R_3^{(2)}$ und $R_3^{(3)}$ gewählt und $P^{(4)}$ als Einheitspunkt angenommen werden. Es ist dann in der Matrixgleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

das Gleichungssystem der Ebene $P^{(1)} P^{(2)} P^{(3)}$ gegeben, weil die zweite, dritte und vierte Zeile der Reihe nach die Koordinaten der Punkte $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ und $P^{(3)}$ enthalten. Und nun leuchtet unmittelbar ein, dafs der Einheitspunkt $P^{(4)}$ in dieser Ebene liegt. Denn für $x_1 = x_2 = \ldots = x_{12} = 1$ erhält man eine Matrix, deren erste Zeile mittels Addition aus den drei übrigen Zeilen hervorgeht.

Die obige einfache Entwickelung leitet zu einer allgemeinen analytischen Darstellung incidenter Systeme, welche wir jetzt ebenfalls an dem Beispiele $p = 3$, $q = 2$ vorführen. Dabei wird vorausgesetzt, dafs im Raume R_{11} drei diesen Raum bestimmende Räume gegeben und diese Räume $R_3^{(1)}, R_3^{(2)}, R_3^{(3)}$ kollinear auf einander bezogen sind. Sind nun $P_1, P_2, P_3, P_4, P^{(1)}$ irgend fünf Punkte von $R_3^{(1)}$ mit der Eigenschaft, dafs keine vier dieser Punkte in einer Ebene liegen, und entsprechen ihnen $P_5, P_6, P_7, P_8, P^{(2)}$ in $R_3^{(2)}$ und $P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P^{(3)}$ in $R_3^{(3)}$, so wählen wir die zwölf Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{12}$ als Eckpunkte des Koordinatensimplex und den Punkt $P^{(4)}$, welcher sich aus zwei der drei gegebenen Räume auf den dritten respektive als $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$ projiziert, als Einheitspunkt des homogenen Koordinatensystems. Es sind dann

Digitized by Google

$$\begin{array}{c}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\\ (0, 0, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, 0, 0, 0),\\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\end{array}$$

der Reihe nach die Koordinaten irgend dreier einander entsprechender Punkte $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ der drei kollinear verwandten Räume $R_3^{(1)}, R_3^{(2)}, R_3^{(3)}$. Deshalb stellt die Matrixgleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

die Ebene $Q^{(1)}\,Q^{(2)}\,Q^{(3)}$ dar und erhält man das dreifach unendliche System $(R_2)_3$ dieser Ebenen, wenn man den Verhältnissen der vier Gröfsen λ unter sich alle möglichen Werte erteilt. Und der Ort des Punktes Q dieser Ebenen, dessen Koordinaten x_i mittels der allgemeinen Beziehung

$$\varrho\, x_i = \mu_1 x_i^{(1)} + \mu_2 x_i^{(2)} + \mu_3 x_i^{(3)}$$

in den gleichnamigen Koordinaten $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ der drei Punkte $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ ausgedrückt werden, wird mittels Elimination der Verhältnisse der vier Gröfsen λ aus den Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \varrho\, x_1 = \lambda_1 \mu_1, & \varrho\, x_5 = \lambda_1 \mu_2, & \varrho\, x_9 = \lambda_1 \mu_3 \\ \varrho\, x_2 = \lambda_2 \mu_1, & \varrho\, x_6 = \lambda_2 \mu_2, & \varrho\, x_{10} = \lambda_2 \mu_3 \\ \varrho\, x_3 = \lambda_3 \mu_1, & \varrho\, x_7 = \lambda_3 \mu_2, & \varrho\, x_{11} = \lambda_3 \mu_3 \\ \varrho\, x_4 = \lambda_4 \mu_1, & \varrho\, x_8 = \lambda_4 \mu_2, & \varrho\, x_{12} = \lambda_4 \mu_3 \end{array}$$

in der Form

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix} = 0$$

gefunden. Deshalb ist dieser Ort ein dreidimensionaler Raum, welcher bei Änderung der Verhältnisse der drei Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3 das System $(R_3)_2$ erzeugt. Oder allgemein:

Digitized by Google

„Sind die $(p+1)$ $(q+1)$ homogenen Koordinaten x eines Punktes P des Raumes R_{pq+p+q} durch die Gleichungen

$$\varrho\, x_{i,k} = \lambda_i \mu_k \qquad 73)$$
$$(i = 1, 2, \ldots p+1),\ (k = 1, 2, \ldots q+1)$$

mit einander verbunden, so durchläuft dieser Punkt $P(\lambda, \mu)$ bei Änderung der $p+1$ Parameter λ einen Raum $R_p(\mu)$, bei Änderung der $q+1$ Parameter μ einen Raum $R_q(\lambda)$. Und diese Räume $R_p(\mu)$ und $R_q(\lambda)$ durchlaufen zwei incidente Systeme $(R_p)_q$ und $(R_q)_p$, wenn man beide Systeme von Parametern veränderlich denkt und dabei die Punkte $P(\lambda, \mu)$ des ganzen im R_{pq+p+q} liegenden $p+q$-fach unendlichen Gebietes zunächst durch Zusammenfügung der Punkte $P(\mu)$ mit dem nämlichen Wertsysteme (μ_k) der $q+1$ Parameter μ zu Räumen $R_p(\mu)$, nachher durch Zusammenfügung der Punkte $P(\lambda)$ mit dem nämlichen Wertsysteme (λ_i) der $p+1$ Parameter λ zu Räumen $R_q(\lambda)$ ordnet. Diese Systeme $(R_p)_q$ und $(R_q)_p$ besitzen die schon erwähnten Eigenschaften, d. h.

1º zwei Räume eines nämlichen Systems sind allemal zu einander windschief;

2º irgend ein Raum des einen Systems hat mit irgend einem Raume des andern immer einen Punkt und niemals eine Gerade gemein;

3º irgend zwei Räume des einen Systems werden durch die Räume des andern kollinear auf einander bezogen."

Die hier vorgeführten allgemeinsten incidenten Räume rühren von Segre her; die analytische Darstellung 73) ist 1891 von ihm gegeben worden (*Rendiconti di Palermo*, Bd. 5, S. 192). Wir kommen weiterhin — vergleiche nächstens die Lösung der Aufgabe 225 — auf den nicht linearen Ort der Punkte $P(\lambda, \mu)$ von $p+q$ Dimensionen zurück.

Es kann nicht unsere Absicht sein, hier eine sei es auch nur annähernd vollständige Theorie der kollinearen Verwandtschaft zu geben. Wir unterdrücken also alles selbstverständliche, wie z. B. dafs einander entsprechende Grundgebilde kollinear verwandter Räume kollinear verwandt sind, dafs man — von den Gleichungssystemen 54) und 55) ausgehend — die Verwandtschaft der Räume R_m, R'_m auch mittels zweier Gruppen von $m+2$ Räumen

Digitized by Google

R_{m-1} und R'_{m-1} bestimmen kann, u. s. w. und beschränken uns weiterhin auf einige Bemerkungen über merkwürdige spezielle Fälle.

104. **Kollineare Verwandtschaft von konjektiven Räumen. Koincidenzpunkte.** Sind die Räume R_m, R'_m zu einander windschief, so können die betrachteten kollinear verwandten Gebilde selbstverständlich keinen Punkt entsprechend gemein haben; erst wenn diese Räume R_m, R'_m sich teilweise durchdringen oder zusammenfallen, tritt die Möglichkeit dieser „Koincidenzpunkte" ein. Wir fragen nun zunächst, wie groſs wohl die Zahl der *getrennten* Koincidenzpunkte unter günstigen Umständen werden kann. Man findet leicht, daſs $m+1$ dieses Maximum angiebt, indem man zeigt, daſs die gesuchte Zahl einerseits wirklich bis zu $m+1$ ansteigen, andererseits aber $m+1$ nicht übersteigen kann. Hat man nämlich bei der Erzeugung zweier kollinear verwandter Systeme mittels zweier Gruppen $A_1, A_2, \ldots A_{m+2}$ und $A'_1, A'_2, \ldots A'_{m+2}$ von $m+2$ Punkten die $m+1$ Paare $(A_1, A'_1), (A_2, A'_2), \ldots (A_{m+1}, A'_{m+1})$ in den $m+1$ Eckpunkten P_i irgend eines Simplex $S(m+1)$ zusammenfallen lassen, A_{m+2} und A'_{m+2} jedoch im durch dieses Simplex bestimmten Raume R_m ganz willkürlich gewählt, so ergiebt sich, daſs die beiden kollinear verwandten Systeme, welche nun notwendig im nämlichen Raume R_m liegen, die $m+1$ Eckpunkte des Simplex $S(m+1)$ entsprechend gemein haben und auſserdem keinen anderen Koincidenzpunkt aufweisen können, ohne daſs ein Ort von Koincidenzpunkten entsteht. Denn, so lange nur von getrennten Koincidenzpunkten die Rede ist, würde ein $m+2^{\text{ter}}$ Koincidenzpunkt eine willkürliche Lage haben, wenn nicht in Bezug auf das Simplex $S(m+1)$ selbst, so doch wenigstens in Bezug auf irgend einen ihn enthaltenden begrenzenden Raum R_{m-p} dieses Gebildes, wo p den Wert $1, 2, \ldots m-1$ annehmen kann. Und nun ist, wie aus der Bestimmung der Verwandtschaft mit Hilfe von Koordinatensimplexen und Einheitspunkten hervorgeht, im ersten Falle der Raum R_m selbst, im zweiten Falle der in Rede stehende Grenzraum R_{m-p} des $S(m+1)$ Ort von Koincidenzpunkten. Denn in diesem zweiten Falle enthält dieser sich selbst entsprechende Raum R_{m-p} auſser den Eckpunkten des $S(m-p+1)$, welches von den in diesem R_{m-p} liegenden Eckpunkten des $S(m+1)$ gebildet

Digitized by Google

wird, einen in Bezug auf dieses $S(m-p+1)$ willkürlich liegenden Koincidenzpunkt.

Die Frage nach der Zahl der getrennt liegenden Koincidenzpunkte wird auch leicht analytisch erledigt. Setzt man nämlich voraus, dafs die beiden homogenen Koordinatensysteme der in 52) auftretenden Koordinaten t_i und t_i' zusammenfallen, so nehmen die $n+1$ Gleichungen $t_i' = t_i$, welche die Bedingung der Koincidenz ausdrücken, die Gestalt

$$b_{1,i}t_1 + b_{2,i}t_2 + \ldots + b_{i-1,i}t_{i-1} + (b_{i,i} - \sigma)\,t_i + b_{i+1,i}t_{i+1} + \ldots + b_{n+1,i}t_{n+1} = 0$$

an, aus welcher mittels Elimination der Verhältnisse der t_i das Resultat

$$B_{n+1,\sigma} \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-\sigma & b_{21} & b_{31} & \ldots & b_{n+1,1} \\ b_{12} & b_{22}-\sigma & b_{32} & \ldots & b_{n+1,2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}-\sigma & \ldots & b_{n+1,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1,n+1} & b_{2,n+1} & b_{3,n+1} & \ldots & b_{n+1,n+1}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad 74)$$

abgeleitet wird. Da nun jede Wurzel σ dieser Gleichung $n+1^{\text{sten}}$ Grades einen Koincidenzpunkt liefert, so giebt es $n+1$ solcher Punkte. Allein, wenn die Gröfsen $b_{i,k}$ willkürlich sind, so ist die Gleichung in σ eine ganz willkürliche und kann deshalb eine Gruppe von Wurzeln aus paarweise imaginären oder zusammenfallenden bestehen, u. s. w.

Aufgabe 221. Bestimme die vier Koincidenzpunkte der kollinear verwandten Systeme

$$\frac{y_1}{9x_1+5x_2+4x_3+3x_4} = \frac{y_2}{3x_1+8x_2+x_3} = \frac{y_3}{-x_2+7x_3-3x_4} = \frac{y_4}{-3x_1-4x_2-5x_3+6x_4}$$

im gewöhnlichen Raume.

[Ersetzt man y_i durch x_i und ist σ der reziproke Wert der neuen Brüche, so wird die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 9-\sigma & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 8-\sigma & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7-\sigma & -3 \\ -3 & -4 & -5 & 6-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

die Werte 3, 6, 9, 12 für σ liefern. Nachher giebt Auflösung der drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(9-\sigma)x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0\\ 3x_1 + (8-\sigma)x_2 + x_3 &= 0\\ -x_2 + (7-\sigma)x_3 - 3x_4 &= 0\end{aligned}\right\}$$

für die Koincidenzpunkte

$(-2, 1, 1, 1)$, $(1, -2, 1, 1)$, $(1, 1, -2, 1)$, $(1, 1, 1, -2)$.]

Aufgabe 222. Welche Form nehmen die Verwandtschaftsgleichungen der Aufgabe 221 an, wenn man das Tetraeder der vier Koincidenzpunkte als Koordinatensimplex wählt?

[Man findet $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{2x_2} = \frac{y_3}{3x_3} = \frac{y_4}{4x_4}$.]

Aufgabe 223. Zeige, dafs die Gleichungen

$$x_i' = \frac{b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + \ldots b_{m,i}x_m + b_{m+1,i}}{b_{1,m+1}x_1 + b_{2,m+1}x_2 + \ldots b_{m,m+1}x_m + b_{m+1,m+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad 75)$$

in den beiden Systemen von Parallelkoordinaten x_i und x_i' in den Räumen R_m, R_m' dieser Koordinatensyteme zwei kollinear verwandte Systeme bestimmen.

Unterscheiden wir weiterhin die kollinearen Systeme von ihren Trägern R_m, R_m' mittels der Symbole C_m, C_m', so gilt nun allgemein der Satz:

Ist der Operationsraum Träger zweier kollinear verwandter Systeme C_n, C_n', welche in Bezug auf einander willkürliche Lage haben, so giebt es allemal $n+1$ getrennte Koincidenzpunkte, und von diesen Punkten liegen keine n in einem R_{n-1}.

Man nennt zwei kollineare Systeme C_m, C_m', welche den nämlichen Raum R_m zum Träger haben, *konjektiv*.

Aufgabe 224. Beweise, dafs zwei willkürlich im R_n angenommene kollineare Systeme C_{n-1}, C_{n-1}' im allgemeinen gar keine Koincidenzpunkte besitzen.

[Durchdringen sich die Träger R_{n-1}, R_{n-1}' der gegebenen Systeme in einem Raume R_{n-2}, und entspricht diesem zu C_{n-1} gerechneten Raume in C_{n-1}' der Raum R_{n-2}', so wird jeder eventuelle Koincidenzpunkt der gegebenen Systeme gleichfalls Koincidenzpunkt der in diesen

Digitized by Google

Systemen enthaltenen kollinearen Systeme C_{n-2}, C'_{n-2} sein, welche die im R'_{n-1} liegenden Räume R_{n-2}, R'_{n-2} zu Trägern haben. Also reduziert sich die gestellte Frage auf diejenige nach den Koincidenzpunkten zweier in einem R'_{n-1} willkürlich liegender kollinearer Systeme C_{n-2}, C'_{n-2}. Mittels Fortsetzung dieses rückschreitenden Verfahrens steht man am Ende der Frage gegenüber, ob zwei in einer Ebene liegende projektive Punktreihen einen Koincidenzpunkt haben, was offenbar nicht der Fall ist.]

Nimmt man die $n+1$ Koincidenzpunkte des letzten Satzes als Eckpunkte des Simplex des gemeinschaftlichen Koordinatensystems an, so vereinfachen sich die Gleichungssysteme 52) und 53) zu

$$\sigma t'_i = b_i t_i, \ (i = 1, 2, \ldots n+1) \qquad 76)$$

und ihren selbstverständlichen Umkehrungen. Und die Determinante der Gleichung 74) reduziert sich auf ihr Hauptglied, d. h. es sind die $n+1$ Gröfsen b_i von 76) die Wurzeln der Gleichung 74). In dem jetzt betrachteten Falle von $n+1$ gesonderten Koincidenzpunkten sind also die $n+1$ Gröfsen b_i alle von einander verschieden.

Die Verhältnisse der Koeffizienten b_i werden leicht auf Doppelverhältnisse zurückgeführt. Aus dem Gleichungspaare $\sigma t'_i = b_i t_i$, $\sigma t'_k = b_k t_k$ folgt nämlich

$$\frac{b_i}{b_k} = \frac{t'_i}{t'_k} : \frac{t_i}{t_k},$$

d. h.: Werden die einander entsprechenden Punkte P, P' aus dem der Kante $P_i P_k$ des *Hauptsimplex* der Verwandtschaft gegenüberliegenden Seitenraume R_{n-2} auf diese Kante in $\overline{P}$, $\overline{P}'$ projiziert, so ist das Doppelverhältnis

$$(\overline{P}\,\overline{P}'\,P_i P_k) = \frac{\overline{P}\,P_i}{\overline{P}'\,P_i} : \frac{\overline{P}\,P_k}{\overline{P}'\,P_k}$$

allemal konstant, auf welches Punktepaar P, P' man diese Konstruktion auch anwenden möge, nämlich gleich $\frac{b_k}{b_i}$. Nennt man diese Gröfse $\frac{b_k}{b_i}$ das Doppelverhältnis der Kante $P_i P_k$, so findet man, dafs die kollineare Verwandtschaft auch be-

Digitized by Google

stimmt ist, sobald man das Hauptsimplex und die n Doppelverhältnisse der durch einen Eckpunkt gehenden Kanten kennt.

Die speziellen Fälle, zu denen die Gleichung 76) hinführt, werden nächstens erörtert werden.

Aufgabe 225. Beweise, dafs vier zu einander windschiefe Räume $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}, R_p^{(3)}, R_p^{(4)}$ von R_{2p+1} eine Anzahl von $p+1$ gemeinschaftlichen Transversalen zulassen[48₁₀].

[Es schneiden die gemeinschaftlichen Transversalen der Tripel $(R_p^{(1)}, R_p^{(2)}, R_p^{(4)})$ und $(R_p^{(1)}, R_p^{(3)}, R_p^{(4)})$ in $R_p^{(4)}$ zwei mit $R_p^{(1)}$ kollinear verwandte Punktsysteme ein, und diese deshalb auch unter sich kollinear verwandten Systeme weisen $p+1$ Koincidenzpunkte auf.

Aus obigem Ergebnisse folgt auch unmittelbar, dafs der Ort der gemeinschaftlichen Transversalen von $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}, R_p^{(3)}$ die Eigenschaft besitzt durch einen willkürlichen vierten Raum R_p von R_{2p+1} in $p+1$ Punkten geschnitten zu werden; d. h. dieser Ort[103₄] ist eine „Varietät“ V_p^{p+1} von der Ordnung und der Dimensionenzahl $p+1$.]

105. **Affinität.** Wir kehren zu den nicht konjektiven kollinearen Systemen C_m und C'_m zurück und bezeichnen die den uneigentlichen Räumen U_{m-1} und V'_{m-1} ihrer Träger R_m und R'_m in C'_m und C_m entsprechenden Räume mit U'_{m-1} und V_{m-1}. Weil jedem Elemente von V_{m-1} oder U'_{m-1} ein ins Unendliche verschwundenes Element entspricht, so nennt man V_{m-1} und U'_{m-1} die *Fluchträume* von C_m und C'_m. Jedem zu V_{m-1} parallelen Elemente von R_m ist ein zu U'_{m-1} paralleles Element von R'_m zugeordnet. Und sind die Systeme in perspektiver Lage[99₄], so entspricht der uneigentliche Raum U_{m-2} des perspektiven Durchschnitts R_{m-1} sich selbst, und sind deshalb die Fluchträume V_{m-1} und U'_{m-1} diesem R_{m-1} und also auch zu einander parallel. Die erste der oben[99₃] gestellten zwei Fragen, ob es möglich sei, irgend zwei kollineare Räume R_m, R'_m durch Bewegung in die perspektive Lage zu bringen, ist deshalb identisch mit derjenigen, ob es in R_m einen zu V_{m-1} parallelen Raum W_{m-1} giebt, dessen Punkte den Punkten des entsprechenden zu U'_{m-1} parallelen Raumes W'_{m-1} so entsprechen, dafs diese kollinearen Systeme W_{m-1}, W'_{m-1} durch Bewegung in

Digitized by Google

Koincidenz gebracht werden können. Hierauf kommen wir später zurück[108,7].

Fällt insbesondere V_{m-1} mit U_{m-1} und also auch U'_{m-1} mit V'_{m-1} zusammen, so nennt man die Verwandtschaft eine *affine*. Es entsprechen dann parallelen Geraden, Ebenen, Räumen ... von R_m allemal wieder parallele Geraden, Ebenen, Räume ... von R'_m.

Bei konjektiven affinen Systemen im R_n entspricht der uneigentliche Raum U_{n-1} sich selbst und mufs er also n der $n+1$ getrennten Koincidenzpunkte in sich aufnehmen. Es hat das Hauptsimplex dann n uneigentliche Eckpunkte, weshalb das mit ihm verbundene gemeinschaftliche Koordinatensystem in ein System von Parallelkoordinaten übergeht. Und sind λ_i, $(i = 1, 2, \ldots n)$ die Doppelverhältnisse[104,14] der im Ursprunge zusammenstofsenden Kanten, d. h. der Koordinatenachsen, so charakterisieren die Gleichungen

$$x'_i = \lambda_i x_i \qquad 77)$$

die affine Verwandtschaft. Im Falle der $n+1$ getrennten Koinzidenzpunkte sind die n Gröfsen λ_i dann wieder alle von einander verschieden.

Aufgabe 226. Beweise, dafs dem Fluchtraume V_{m-1} des ersten der beiden kollinear verwandten Systeme C_m, C'_m von Aufgabe 223 die Gleichung

$$b_{1,m+1}x_1 + b_{2,m+1}x_2 + \ldots + b_{m,m+1}x_m + b_{m+1,m+1} = 0$$

zukommt.

Aufgabe 227. Zeige, dafs die Gleichungen

$$x'_i = b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + \ldots b_{m,i}x_m + b_{m+1,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

zwei affine Systeme C_m, C'_m bestimmen.

106. **Örter von Koincidenzpunkten.** Die einfachen Betrachtungen über die Doppelverhältnisse der Kanten des Hauptsimplex am Schlusse der Nr. 104 zeigen auch, welche besondere Eigenschaft die Verwandtschaft erhält, wenn zwei der $n+1$ Koeffizienten b_i einander gleich werden. Ist $b_1 = b_2$, so ist das Doppelverhältnis $(\bar{P}\bar{P}'P_1P_2)$ der Einheit gleich und müssen also, — da P_1 und P_2 wirklich ver-

Digitized by Google

schiedene Punkte sind —, die Projektionen $\bar{P}, \bar{P}'$ irgend eines Paares einander entsprechender Punkte P, P' aus dem der Kante P_1P_2 gegenüberliegenden Seitenraume R_{n-2} auf diese Kante zusammenfallen; dann aber haben die Systeme C_n und C'_n die Punkte der Kante P_1P_2 zu Koincidenzpunkten und die Räume R_{n-1} durch den gegenüberliegenden Seitenraum R_{n-2}, jeden dieser Räume R_{n-1} als Ganzes betrachtet, zu Koincidenzräumen. Indem dann auf irgend einer andern Kante P_iP_k die einander entsprechenden Punkte P, P' zwei projektive Punktreihen bilden, von welchen P_i, P_k die Doppelpunkte sind, sind diese Punktreihen auf P_1P_2 dann mit einander identisch geworden und verlieren also die Eckpunkte P_1, P_2 dieser Kante, was sie von andern Punkten dieser Kante unterschieden hat; d. h. die Eckpunkte P_1, P_2 auf P_1P_2 sind unbestimmt geworden, können also durch irgend zwei andere Punkte von P_1P_2, wenn nötig durch zwei einander unmittelbar benachbarte Punkte dieser Kante ersetzt werden. Auf diese Weise treten wir der Thatsache, dafs die Gleichung 74) für $b_1 = b_2$ zwei gleiche Wurzeln aufweisen mufs, möglichst nahe.

Allein wir müssen sofort hinzufügen, dafs es ein Irrtum wäre, zu behaupten, dafs umgekehrt eine Gerade von Koinzidenzpunkten vorhanden sein mufs, sobald zwei der Wurzeln der Gleichung 74) einander gleich werden. Denn im allgemeinen ist hieraus nur zu entnehmen, dafs zwei der $n+1$ Koincidenzpunkte einander auf ihrer Verbindungslinie unendlich nahe liegen, und die projektiven Punktreihen auf dieser Gerade zwei zusammenfallende Doppelpunkte besitzen. Mit anderen Worten: damit es eine Gerade von Koincidenzpunkten gebe, ist die Bedingung, die Gleichung 74) habe zwei gleiche Wurzeln zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Ohne weiteres entspricht der Gleichheit zweier dieser Wurzeln *nur* das Zusammenfallen zweier der $n+1$ sonst immer getrennten Koincidenzpunkte, in welchem Falle, wie wir oben schon bemerkten, das Doppelverhältnis der entsprechenden Kante uns nichts lehren kann. Und dann ist es im allgemeinen unmöglich zu den einfachen Verwandtschaftsgleichungen 76) aufzusteigen, weil das Hauptsimplex nicht mehr als Koordinatensimplex zu verwenden ist. Natürlich mufs eine weitere Untersuchung dann lehren, ob der der

Digitized by Google

doppelten Wurzel der Gleichung 74) entsprechende Koincidenzpunkt ein bestimmter Punkt bleibt und also der allgemeine Fall vorliegt, oder dieser Punkt unbestimmt wird und man es mit dem speziellen Falle eines Ortes von Koincidenzpunkten zu thun hat.

Aufgabe 228. Bestimme die Koincidenzpunkte der kollinearen ebenen Systeme

$$\frac{y_1}{(2-p)x_1+(1+p)x_2-(1-p)x_3} = \frac{y_2}{x_1+2x_2-x_3} = \frac{y_3}{-px_1+px_2+(1+p)x_3}.$$

[Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2-p-\sigma & 1+p & -1+p \\ 1 & 2-\sigma & -1 \\ -p & p & 1+p-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

hat die Wurzeln 1, 1, 3. Für $\sigma = 1$ wird der entsprechende Koincidenzpunkt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -(p-1)x_1+(p+1)x_2+(p-1)x_3 &= 0 \\ x_1+x_2-x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bestimmt, welche im allgemeinen zwei sich im Punkte $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ schneidende Geraden, im speziellen Falle $p = 0$ aber zwei zusammenfallende Geraden darstellen. Und für $\sigma = 3$ findet man immer den Koincidenzpunkt $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$. Nur unter der Bedingung $p = 0$ giebt es also eine Gerade von Koincidenzpunkten.

Wir bemerken ausdrücklich, dafs die Seite des „Hauptdreiecks", welche die zwei zusammenfallenden Koincidenzpunkte trägt, bestimmt bleibt. Es wird nämlich der Büschel $y_1 - y_3 + \lambda y_2 = 0$ der Geraden durch diesen Punkt für beliebige p in den Büschel

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) = 0$$

transformiert; deshalb ist die Bedingung des Zusammenfallens zweier entsprechender Geraden

$$\frac{1}{2+\lambda} = \frac{\lambda}{1+2\lambda},$$

Digitized by Google

d. h. $\lambda = +1$. Von diesen Geraden ist $y_1 - y_3 - y_2 = 0$ die Verbindungslinie der beiden verschiedenen Koincidenzpunkte; also mufs $y_1 + y_2 = y_3$ die zwei zusammenfallenden Koincidenzpunkte tragen.

Mittels der sich nun leicht ergebenden Substitutionen

$$\varrho z_1 = z_2' + z_3', \quad \varrho z_2 = z_3' + z_1', \quad \varrho z_3 = z_1' + z_2',$$

wo die z der Reihe nach durch die entsprechenden x und y zu ersetzen sind, findet man

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{y_2'}{p x_1' + x_2'} = \frac{y_3'}{3 x_3'}.$$

Also erhält man *nur* für $p = 0$ die einfachste Form

$$\varrho y_1' = x_1', \quad \varrho y_2' = x_2', \quad \varrho y_3' = 3 x_3'$$

der Verwandtschaftsgleichungen mit wirklich drei Koeffizienten b_i, von welchen zwei einander gleich sind.

Unter der Voraussetzung, dafs die verwendeten Koordinaten normale Abstandskoordinaten sind, giebt Figur 60 die Lage der Koincidenzpunkte des allgemeinen Falles an.]

Wir betrachten nun weiter den Fall, wo die drei Koeffizienten b_1, b_2, b_3 der Gleichungen 76) einander gleich werden. Es ergiebt sich dann unmittelbar, dafs die kollinearen Systeme C_n und C_n' alle Punkte der drei Kanten P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 und deshalb auch alle Punkte der Seitenfläche $P_1P_2P_3$ zu Koincidenzpunkten haben. Während in irgend einer andern Seitenfläche $P_iP_kP_l$ die einander entsprechenden Punkte P, P' zwei konjektive kollineare ebene Systeme mit den Koincidenzpunkten P_i, P_k, P_l bilden, sind diese Systeme in $P_1P_2P_3$ identisch, haben die Punkte P_1, P_2, P_3 die sie unterscheidenden Merkmale verloren, und

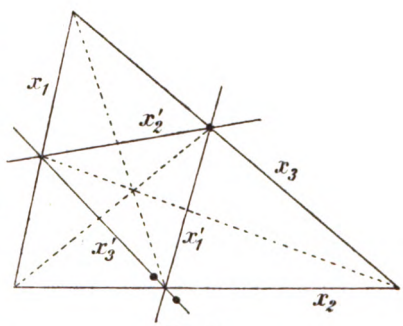


Fig. 60.

Digitized by Google

können also diese Eckpunkte des Hauptsimplex durch irgend drei nicht in gerader Linie liegende Punkte der Ebene $P_1P_2P_3$ ersetzt werden. Und es ist klar, wie man so weitergehen kann. Sind die k Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_k$ der Gleichungen 76) einander gleich, so haben die kollinearen Systeme C_n und C_n' die Punkte des Seitenraumes R_{k-1} durch $P_1, P_2, \ldots P_k$ zu Koincidenzpunkten, u. s. w.

Aufgabe 229. Beweise, dafs sogar dann noch keine Gerade von Koincidenzpunkten vorhanden sein *mufs*, wenn drei der Wurzeln der Gleichung 74) einander gleich werden.

[Sind die drei Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der Gleichung 74) einander gleich, so findet man im allgemeinen nur, dafs die entsprechenden Koincidenzpunkte P_1, P_2, P_3 in einer bestimmten Ebene in einen Punkt P zusammenfallen. Allein in dieser Ebene liegt dann noch kein Ort von Koincidenzpunkten. Denn das einfache Beispiel

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{px_1 + x_2} = \frac{y_3}{qx_1 + rx_2 + x_3}$$

von zwei konjektiven kollinearen ebenen Systemen mit drei im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ vereinigt liegenden Koincidenzpunkten zeigt, dafs es im allgemeinen keinen Ort von Koincidenzpunkten giebt, die Achse $x_1 = 0$ im Gegenteil erst unter der Voraussetzung $r = 0$ als solcher auftritt.]

107. **Gescharte und involutorisch gescharte Systeme.** Natürlich kann die Gleichung 74) mehrere Gruppen von gleichen Wurzeln zulassen. Von dieser Unmasse spezieller Fälle betrachten wir blofs diejenigen etwas näher, wobei die Gleichungen 76) vorliegen und die $n+1$ Gröfsen b_i sich in zwei Gruppen von gleichen Gröfsen teilen.

Sind $b_1, b_2, \ldots b_k$ gleich c und zu gleicher Zeit $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots b_{n+1}$ gleich d, so haben die kollinearen Systeme C_n, C_n' die Punkte der zwei einander gegenüberliegenden Räume R_{k-1}, R_{n-k}, von welchen der erste die Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots P_k$, der zweite die Eckpunkte $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots P_{n+1}$ des Hauptsimplex enthält, entsprechend gemein. Durch irgend einen Punkt P aufserhalb dieser zu einander windschiefen Räume geht dann immer eine und nur eine gemeinschaftliche Transversale g dieser

Digitized by Google

Räume; denn nach Formel 6) haben die im R_n liegenden Räume $R_k = (R_{k-1}, P)$ und $R_{n-k+1} = (R_{n-k}, P)$ eine Gerade gemein und mufs diese Gerade die Räume R_{k-1}, R_{n-k} schneiden. Auf dieser Gerade g mufs der dem Punkte P von C_n entsprechende Punkt P' von C_n' sich befinden; denn, da die Schnittpunkte von g mit den Räumen R_{k-1} und R_{n-k} Koincidenzpunkte sind, so mufs die Gerade als Ganzes sich selbst entsprechen. Auf ihr bilden die einander entsprechenden Punkte P, P' zwei projektive Punktreihen, für welche die in R_{k-1} und R_{n-k} liegenden Punkte die Doppelpunkte sind. Und das Verhältnis $\frac{c}{d}$ zeigt das von den Paaren entsprechender Punkte P, P' mit diesen Doppelpunkten gebildete konstante Doppelverhältnis an.

Die konjektiven kollinearen Systeme mit zwei zu einander windschiefen Örtern R_{k-1} und R_{n-k} von Koincidenzpunkten nennt man *geschart*. Weil die Spaltung von $n+1$ in zwei Summanden auf $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ verschiedene Arten geschehen kann, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so giebt es für irgend ein n eine durch die gröfsere Hälfte von n angewiesene Zahl von gescharten Räumen verschiedener Art. Die bekannteste ist diejenige mit verschwindendem $k-1$, wo die gescharten Systeme C_n, C_n' einen Eckpunkt und den gegenüberliegenden Seitenraum R_{n-1} Punkt für Punkt entsprechend gemein haben. Als man die kollineare Verwandtschaft noch *Homographie* nannte, hiefs diese gescharte Verwandtschaft *Homologie*. Ferner weisen wir auf den in R_{2p+1} auftretenden regelmäfsigen Fall hin, wobei es zwei Räume R_p von Koincidenzpunkten giebt.

Ohne Hilfe der Gleichungen 76) kommt man auf die gescharten Systeme folgendermafsen geometrisch zurück. Liegen im R_n zwei zu einander windschiefe Räume R_{k-1}, R_{n-k} (Fig. 61) gegeben vor, so kann man jedem Punkte P den Punkt P' zuordnen, welcher auf der einzigen durch P gehenden gemeinschaftlichen Transversale p von R_{k-1}, R_{n-k} eine solche Lage hat, dafs P und P' mit den Schnittpunkten P_1, P_2 dieser Transversale und R_{k-1}, R_{n-k} in einer bestimmten Reihenfolge genommen ein bestimmtes Doppelverhältnis λ bilden. Dadurch erzeugt man dann wirklich

Digitized by Google

zwei kollineare Systeme C_n, C_n'. Denn die Verwandtschaft der Punktepaare P, P' ist eine eindeutige, welche die Eigenschaft besitzt, linearen Örtern von Punkten P ebenfalls lineare Örter von Punkten P' zuzuordnen. Durchläuft nämlich P die willkürliche Gerade g, so beschreiben die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Transversale p ebenfalls Geraden g_1 und g_2, und diese liegen mit g im nämlichen Raume. Denn die Räume $R_{k+1} = (R_{k-1}, g)$ und $R_{n-k+2} = (R_{n-k}, g)$ haben nach Formel 6) einen R_3 gemein und dieser Raum schneidet den R_{k-1}, mit welchem er in einem R_{k+1} liegt, und ebenso den R_{n-k}, mit welchem er in einem R_{n-k+2} liegt, in einer Gerade. Also ist der Ort der Punkte P', welche den Punkten P von g entsprechen, ein bestimmter Strahl g' der Regelschar (g, g_1, g_2). Und offenbar haben die so erzeugten kollinearen Systeme die Räume R_{k-1}, R_{n-k} zu Örtern von Koincidenzpunkten.

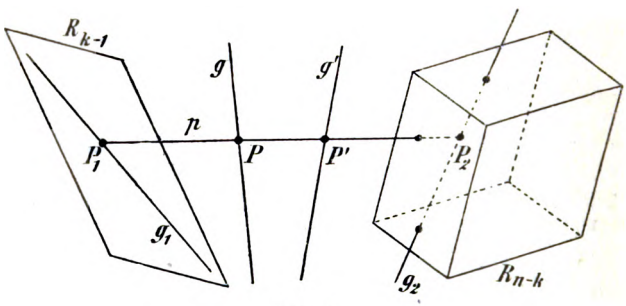


Fig. 61.

Aufgabe 230. Beweise, dafs zwei konjektive kollineare Systeme C_n, C_n', welche die Punkte eines Raumes R_{n-1} entsprechend gemein haben, aufserdem alle Geraden durch einen bestimmten aufserhalb R_{n-1} liegenden Punkt O, jede Gerade als ganzes Gebilde betrachtet, entsprechend gemein haben und also geschart sind.

[Die Gerade, welche irgend zwei einander entsprechende Punkte P, P' verbindet, entspricht sich selbst, denn ihr Schnittpunkt mit R_{n-1} ist ein Koincidenzpunkt. Die zwei projektiven Punktreihen auf dieser Gerade lassen noch einen zweiten Koincidenzpunkt zu, u. s. w.]

Digitized by Google

Aufgabe 231. Sind umgekehrt alle Geraden durch einen Punkt O Koincidenzgeraden zweier konjektiven kollinearen Systeme C_n, C'_n, so haben diese Systeme die Punkte eines Raumes R_{n-1} entsprechend gemein und sind sie geschart. Weshalb?

Man erhält eine äufserst merkwürdige Gruppe von gescharten Räumen, wenn das dabei auftretende Doppelverhältnis λ der negativen Einheit gleich ist; denn in diesem Falle entsprechen sich die Punkte P, P' *vertauschungsfähig*. In diesen Fällen nennt man die Systeme *involutorisch* geschart.

Aufgabe 232. Beweise, dafs die kollineare Verwandtschaft zweier konjektiver Systeme C_n, C'_n bestimmt ist, sobald man das Hauptsimplex und irgend ein Paar einander entsprechender Punkte P, P' kennt, und untersuche, welche Lage man diesen Punkten P, P' in Bezug auf das Hauptsimplex geben mufs, wenn man

a) eine gescharte Verwandtschaft,

b) eine involutorisch gescharte Verwandtschaft

erzeugen will?

Aufgabe 233. Im R_n ist ein Raum R_{n-1} gegeben und werden zwei Punkte P, P' einander zugeordnet, welche in Bezug auf diesen R_{n-1} symmetrisch liegen. Welche kollineare Verwandtschaft verbindet diese Punkte?

Aufgabe 234. Drei willkürlich im R_5 angenommene Geraden g_1, g_2, g_3 sind Örter von Koincidenzpunkten zweier kollinearer Systeme C_5, C'_5; welche besondere Eigenschaft besitzt diese Verwandtschaft?

[Man beweise[97a], dafs durch einen beliebig gewählten Punkt P immer eine und nur eine die drei gegebenen Geraden schneidende Ebene geht und diese Ebene eine Koincidenzebene der Verwandtschaft ist, dafs die Kollineation in jedem der drei Räume $(g_2 g_3)$, $(g_3 g_1)$, $(g_1 g_2)$ eine gescharte ist, u. s. w.]

Aufgabe 235. Im Raume $R_{n=2k-1}$ sind k willkürlich angenommene Geraden $g_1, g_2, \ldots g_k$ Örter von Koincidenzpunkten zweier kollinearer Systeme C_n, C'_n; welche besondere Eigenschaften kommen dieser Verwandtschaft zu?

Digitized by Google

[Durch einen beliebig gewählten Punkt P kann man[97₄] immer einen und nur einen die k gegebenen Geraden schneidenden Raum R_{k-1} legen, welcher dann wieder ein Koincidenzraum der Verwandtschaft ist, u. s. w.]

Aufgabe 236. Im Raume $R_{n=pk-1}$ sind k willkürlich angenommene Räume R_{p-1} Örter von Koincidenzpunkten zweier kollinearer Systeme C_m, C'_n. Zu beweisen, dafs durch einen beliebig gewählten Punkt P ein Koincidenzraum R_{p-1} hindurchgeht.

Früher[101₁₀] hat sich ergeben, dafs irgend zwei kollineare Systeme C_m, C'_m als erstes und letztes Glied einer Kette von perspektiv liegenden Nachbarsystemen zu betrachten sind, sobald dies bewiesen ist von zwei konjektiven kollinear verwandten Systemen, welche $m+1$ den Träger R_m bestimmende reelle Koincidenzpunkte zulassen und also immer durch die auf das nämliche Koordinatensystem bezogenen Gleichungen

$$\sigma t'_i = b_i t_i, \quad (i = 1, 2, \ldots m+1) \qquad 78)$$

dargestellt werden können. Wir sind jetzt imstande, die dort in Aussicht gestellte Ergänzung des Beweises zu liefern und betrachten zu diesem Zwecke abermals eine Kette von konjektiven kollinear verwandten Systemen C_m, $C_m^{(1)}$, $C_m^{(2)}, \ldots C_m^{(m)}$, C'_m, welche Systeme durchlaufen werden durch die Punkte

$$\begin{aligned}
&P \ldots . (t_1, t_2, \ldots t_m, t_{m+1}),\\
&P_1 \ldots . (t'_1, t_2, \ldots t_m, t_{m+1}),\\
&P_2 \ldots . (t'_1, t'_2, \ldots t_m, t_{m+1}),\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&P_m \ldots . (t'_1, t'_2, \ldots t'_m, t_{m+1}),\\
&P' \ldots . (t'_1, t'_2, \ldots t'_m, t'_{m+1}),
\end{aligned}$$

wenn P das System C_m beschreibt und die t'_i mittels der Gleichungen 78) mit den t_i zusammenhängen. Von dieser neuen Kette ist jedes intermediäre Glied nach der Art der oben erwähnten Homologie mit jedem der beiden unmittelbar benachbarten geschart. Und bei zwei „homolog verwandten" Systemen wie C_m und $C_m^{(1)}$ findet sich unmittelbar ein drittes mit beiden perspektiv liegendes System. Bringt

Digitized by Google

man nämlich durch den die Eckpunkte $A_2, A_3, \ldots A_{m+1}$ enthaltenden Seitenraum $R^{(1)}_{m-1}$ des Koordinatensimplex einen von R_m verschiedenen Raum R'_m und betrachtet die durch die Gruppen

$$(P, Q, A_2, A_3, \ldots . A_{m+1}),$$
$$(P'_1, Q'_1, A_2, A_3, \ldots . A_{m+1}),$$
$$(P', Q', A_2, A_3, \ldots . A_{m+1})$$

von $m+2$ Punkten bestimmten kollinearen Systeme C_m, $C'^{(1)}_m$, $C^{(1)}_m$, — wo (P, Q) irgend zwei Punkte von C_m, (P', Q') die entsprechenden Punkte von C'_m und (P'_1, Q'_1) irgend zwei aufserhalb R_m liegende Punkte von R'_m sind, deren Verbindungslinie den PQ und $P'Q'$ gemeinsamen Punkt von $R^{(1)}_{m-1}$ enthält —, so leuchtet unmittelbar ein, dafs im Raume R_{m+1} durch R_m und R'_m das System $C'^{(1)}_m$ von R'_m sich aus den Schnittpunkten C von PP'_1, QQ'_1 und C' von $P'P'_1$, $Q'Q'_1$ der Reihe nach als C_m und C'_m auf R_m projiziert, u. s. w.

108. **Orthogonalitäts- und kollineare Verwandtschaft.** Hat man in den kollinearen Räumen R_m, R'_m die Punkte O, O' willkürlich angenommen, so kann man auf R_m irgend eine Orthogonalitätsverwandtschaft[98] mit dem Centrum O, auf R'_m irgend eine Orthogonalitätsverwandtschaft mit dem Centrum O' anwenden und nun diejenigen Punkte P von R_m und P' von R'_m einander zuordnen, welche aus einander in der gegebenen kollinearen Verwandtschaft entsprechenden Räumen R_{m-1} von R_m und R'_{m-1} von R'_m hervorgegangen sind. Dadurch ist dann zwischen den Punkten der Räume R_m, R'_m eine neue Verwandtschaft erzeugt, welche sich bald als eine kollineare erweist. Denn die ursprüngliche Verwandtschaft ordnet die Räume R'_{m-1} von R'_m den Räumen R_{m-1} von R_m derart zu, dafs durch einen R'_{m-2} gehende Räume R'_{m-1} allemal wieder durch einen R_{m-2} gehenden Räumen R_{m-1} entsprechen; deshalb sind in der neuen Verwandtschaft auf einer Gerade g liegenden Punkten P von R_m allemal wieder auf einer Gerade g' liegende Punkte P' zugeordnet.

Aufgabe 237. Welche besondere Eigenschaft hat die neue Verwandtschaft, falls O, O' einander in der ursprünglichen zugeordnet sind?

Digitized by Google

[Die neue Verwandtschaft ist dann eine affine.]

Aus obiger Umbildung der kollinearen Verwandtschaft werden in Verbindung mit früheren Entwickelungen[101] die folgenden Sätze abgeleitet:

Sollen zwei Räume R_m, R'_m kollinear auf einander bezogen werden, so darf man $m+2$ beliebigen Räumen R_{m-1} von R_m, von welchen nicht $m+1$ durch einen Punkt gehen, irgend $m+2$ derselben Bedingung genügende Räume R'_{m-1} von R'_m als entsprechende zuordnen, womit dann jedem R_{m-1} von R_m ein bestimmter R'_{m-1} von R'_m zugeordnet ist.

Werden die Sterne $\Sigma^{(1)}_{m-1,m-1}$, $\Sigma^{(2)}_{m-1,m-1}$ in $R_m = \Sigma_{m-1,m}$ derart kollinear bezogen auf die Sterne $\Sigma'^{(1)}_{m-1,m-1}$, $\Sigma'^{(2)}_{m-1,m-1}$ in $R'_m = \Sigma'_{m-1,m}$, daſs die Verwandtschaften $W_1 = [\Sigma^{(1)}_{m-1,m-1}, \Sigma'^{(1)}_{m-1,m-1}]$ und $W_2 = [\Sigma^{(2)}_{m-1,m-1}, \Sigma'^{(2)}_{m-1,m-1}]$ in dem gemeinschaftlichen Gebiete die nämliche Verwandtschaft $W_{1,2} = [\Sigma^{(1,2)}_{m-1,m-2}, \Sigma'^{(1,2)}_{m-1,m-2}]$ hervorrufen, so ist hiermit zu gleicher Zeit eine kollineare Verwandtschaft W zwischen den Räumen R_m, R'_m erzeugt.

Bestimmt man entsprechend dem ersten dieser beiden Sätze in den Räumen R_m, R'_m zwei kollineare Systeme mittels der zwei Gruppen von Räumen R_{m-1}

$$U_{m-1},\ V_{m-1},\ R^{(1)}_{m-1},\ R^{(2)}_{m-1},\ \ldots\ R^{(m)}_{m-1},$$
$$U'_{m-1},\ V'_{m-1},\ R'^{(1)}_{m-1},\ R'^{(2)}_{m-1},\ \ldots\ R'^{(m)}_{m-1},$$

wo U_{m-1} den uneigentlichen Raum von R_m, V'_{m-1} den uneigentlichen Raum von R'_m bezeichnet und also[105₁] V_{m-1} und U'_{m-1} die Fluchträume von R_m und R'_m sind, so ergiebt sich, daſs die Frage, ob es möglich ist die kollinearen Systeme durch Bewegung in die perspektive Lage zu bringen sich reduziert auf die Frage, ob es[105₁] zwei einander entsprechende respektive zu V_{m-1} und U'_{m-1} parallele Räume W_{m-1}, W'_{m-1} giebt, für welche das Durchschnittsimplex S_m von W_{m-1} mit den m durch einen Punkt gehenden Räumen $R^{(i)}_{m-1}$ und das Durchschnittsimplex S'_m von W'_{m-1} mit den m durch einen Punkt gehenden Räumen $R'^{(i)}_{m-1}$ mit einander zur Deckung gebracht werden können, d. h. ob die Durchschnittsimplexe von V_{m-1} mit den m Räumen $R^{(i)}_{m-1}$ und U'_{m-1} mit den m Räumen $R'^{(i)}_{m-1}$ unter sich ähnlich

Digitized by Google

sind. Und nun werden wir wohl nicht zu viel der Behandlung der Ähnlichkeitsfragen im zweiten Teile dieses Buches vorauseilen, wenn wir aus der Willkürlichkeit der zwei angenommenen Gruppen von Räumen den Schlufs ziehen, dafs die verlangte Ähnlichkeit im allgemeinen nicht stattfindet und zwei willkürlich gegebene kollineare Systeme deshalb nicht in die perspektive Lage gebracht werden können.

Aufgabe 238. Man beweise den Satz:

„Zwei kollinear verwandte Systeme C_m, C'_m können höchstens die endliche Zahl von $m+1$ Räumen R_{m-1} entsprechend gemein haben, d. h. haben sie $m+2$ Räume R_{m-1} entsprechend gemein, so lassen sie eine unendliche Zahl solcher Koincidenzräume zu; die kollinearen Systeme C_m, C'_m mit nur $m+1$ Koincidenzräumen R_{m-1} sind konjektiv und haben alle Elemente eines $S(m+1)$ entsprechend gemein."

Aufgabe 239. Haben zwei kollinear verwandte Räume R_m, R'_m eine Anzahl von $p+2$ Räumen R_{p-1} eines Raumes R_p entsprechend gemein und gehen nicht $p+1$ dieser $p+2$ Räume R_{p-1} durch einen Punkt, so haben die kollinearen Räume *alle* Räume R_{p-1} und also überhaupt alle Elemente von R_p entsprechend gemein und sind sie deshalb innerhalb R_p identisch.

Man wünscht die sich auf zwei kollinear verwandte Sterne $\Sigma_{m-1,m}$, $\Sigma'_{m-1,m}$ beziehende duale Umkehrung dieses Satzes.

Aufgabe 240. Beweise, dafs die kollineare Verwandtschaft zweier konjektiver Systeme C_n, C'_n bestimmt ist, sobald man das Hauptsimplex und irgend ein Paar einander entsprechender Räume R_{n-1}, R'_{n-1} kennt, und untersuche, welche Lage man diesen Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} in Bezug auf das Hauptsimplex geben mufs, wenn man

a) eine gescharte Verwandtschaft,

b) eine involutorisch gescharte Verwandtschaft

erzeugen will?

109. **Positive und negative Kongruenz.** Unter den konjektiven affinen Systemen finden sich viele merkwürdige spezielle Fälle vor. Wir denken dabei in erster Linie an zwei kongruente Systeme C_n, C'_n, unter dem Namen Kongruenz zusammenfassend die direkte oder positive Kongruenz,

Digitized by Google

wo C_n' durch *Bewegung* mit C_n zur Deckung gebracht werden kann, und die entgegengesetzte oder negative Kongruenz, wo C_n' nur durch *Umlegung*, d. h. Spiegelung in Bezug auf einen Raum R_{n-1} in Verbindung mit einer Bewegung mit C_n identisch werden kann. Offenbar besteht in diesen beiden Fällen zwischen den Systemen C_n, C_n' eine kollineare Verwandtschaft solcher Art, dafs uneigentlichen Punkten des einen Systems uneigentliche Punkte des andern entsprechen; d. h. die Kongruenz und Symmetrie, welche im zweiten Teile dieses Buches mehr in den Vordergrund treten werden, sind wirklich spezielle Fälle der Affinität. Diesen speziellen Fällen entspricht die Formelgruppe

$$x_i' = b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + \ldots + b_{n,i}x_n + b_{n+1,i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{79}$$

von welcher schon in der Aufgabe 227 die Rede war, wenn angenommen wird, dafs sie sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehen und die n^2 Koeffizienten $b_{i,k}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Achsen OX_i dieses Systems mit den Achsen $O'X_k'$ irgend eines andern ebenfalls rechtwinkligen Systems bilden. Denn unter diesen Voraussetzungen sind die Verwandtschaftsgleichungen offenbar einerseits der analytische Ausdruck einer Transformation auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, wenn die zwei Koordinatengruppen x_i, x_i' sich auf den nämlichen Punkt beziehen, und also andererseits, wenn diese Koordinatengruppen sich auf das nämliche Koordinatensystem beziehen, die analytische Darstellung zweier kongruenter Systeme, was dann noch eine gewisse Freiheit läfst für die Entscheidung zwischen positiver und negativer Kongruenz. Wirklich beweisen die Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,k}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}b_{i,k'} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n;\ k' = 1, 2, \ldots n;\ k' \neq k) \tag{80}$$

zwischen den n^2 Cosinus auch unmittelbar, dafs der Abstand irgend zweier Punkte von C_n dem Abstande der entsprechenden Punkte von C_n' gleich ist. Und die Entscheidung zwischen den beiden Arten von Kongruenz geschieht mit Hilfe der den Gleichungen 79) entsprechenden Determinante B_n, derem Quadrat, nach den bekannten Gesetzen der

Digitized by Google

Determinantenmultiplikation, in Verbindung mit 80) der Wert Eins zukommt. Ist nämlich mittels einer kontinuierlichen Bewegung von C_n' das bei der ersten Anschauungsweise auftretende Koordinatensystem der x' so weit wie möglich mit demjenigen der x zur Koincidenz gebracht, wobei die positiven Teile der Achsen $O'X_1'$, $O'X_2'$, ... $O'X_{n-1}'$ auf den positiven Teilen der gleichnamigen Achsen $OX_1, OX_2, \ldots OX_{n-1}$ liegen, so fallen zu gleicher Zeit entweder die gleichnamigen oder die ungleichnamigen Teile der Achsen $O'X_n'$ und OX_n auf einander, je nachdem die Systeme positive oder negative Kongruenz besitzen. Also hat die Determinante B_n mit dem absoluten Werte Eins bei positiver Kongruenz das positive, bei negativer Kongruenz das negative Vorzeichen.

Aufgabe 241. Weshalb ist es notwendig, dafs die Bewegung von C_n' eine kontinuierliche sei?

Bei der Affinität zweier konjektiver Systeme liegen n der $n+1$ Koincidenzpunkte des allgemeinen Falles im Seitenraume U_{n-1} des Hauptsimplex, und kann es also nur noch einen eigentlichen Koincidenzpunkt geben. Dieser Punkt, welcher C heifsen möge, wird gefunden, indem man in 79) die x_i' den x_i gleich setzt, mit Hilfe der n Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + \ldots + b_{i-1}x_{i-1} + (b_{i,i} - 1)x_i \\ + b_{i+1}x_{i+1} + \ldots + b_{n,i}x_n = -b_{n+1,i}. \end{aligned} \qquad 81)$$

Wirklich sind diese Gleichungen, da die Gröfsen $b_{n+1,i}$ der rechten Seiten keinerlei Bedingung unterworfen sind, nicht von einander abhängig, und weisen also die entsprechenden Räume im allgemeinen nur einen Schnittpunkt C auf. Allein, es könnte sein, dafs die Determinante der linken Seiten der Gleichungen 81), welche wir mit $B_{n,1}$ bezeichnen, verschwände, in welchem Falle auch dieser Schnittpunkt C unendlich fern liegen würde. Und nun läfst sich in der That leicht zeigen, dafs diese Besonderheit immer eintritt

a) bei positiver Kongruenz für ungerades n,

b) bei negativer Kongruenz für gerades n.

Bildet man nämlich das Produkt der Determinanten B_n und $B_{n,1}$, so findet man mit Hilfe der Bedingungen 80) die Determinante, welche aus $B_{n,1}$ hervorgeht, indem man allen Elementen das entgegengesetzte Vorzeichen erteilt; d. h. man hat

Digitized by Google

$$B_n \,.\, B_{n,1} = (-1)^n \, B_{n,1},$$

welche Beziehung in den angedeuteten Fällen das Null werden von $B_{n,1}$ bedingt, sich aber in den übrigen Fällen

c) bei positiver Kongruenz für gerades n,

d) bei negativer Kongruenz für ungerades n

auf eine Identität reduziert. Deshalb kann es in den letzten Fällen wirklich einen nicht unendlich fern liegenden Koincidenzpunkt C geben.

Aufgabe 242. Ist die Thatsache, dafs der Koincidenzpunkt C in den Fällen unter *a*) und *b*) auch unendlich fern liegt, nicht im Widerspruch mit dem Satze, dafs U_{n-1} nicht $n+1$ Koincidenzpunkte enthalten kann ohne dafs die Anzahl der Koincidenzpunkte in U_{n-1} unendlich wird?

[Dieser scheinbare Widerspruch kann nur gehoben werden, indem gezeigt wird, dafs der Punkt C einem der n Koincidenzpunkte in U_{n-1} unendlich nahe liegt. Es liegt C dann nicht in U_{n-1} sondern — vergleiche das Beispiel der Aufgabe 228 — auf einer bestimmten eigentlichen Gerade einem bestimmten Koincidenzpunkt von U_{n-1} unendlich — oder hier, wenn man will, endlich — nahe. Wir werden bald sehen, dafs dies wirklich der Fall ist.]

110. **Die Koincidenzpunkte kongruenter Systeme im R_3.** Es wird sich bei der Bestimmung aller Koincidenzpunkte konjektiver kongruenter Systeme nützlich zeigen, zuerst die bekannten Fälle des dreidimensionalen Raumes zu betrachten.

Zwei kongruente Punktreihen auf der nämlichen Gerade g haben entweder zwei im Unendlichen zusammenfallende Doppelpunkte oder einen eigentlichen und einen uneigentlichen Doppelpunkt, je nachdem sie positiv oder negativ kongruent sind. Wir bezeichnen den Punkt des ersten Falles mit U_+, die Punkte des zweiten Falles mit C und U_-.

Zwei positiv kongruente Systeme, welche in der nämlichen Ebene ε nicht ähnlich liegen, lassen bekanntlich immer einen eigentlichen Koincidenzpunkt C zu, können jedoch keinen getrennten reellen uneigentlichen Koincidenzpunkt U besitzen; denn die Voraussetzung, dafs ein solcher Punkt

Digitized by Google

U vorliege, bringt mit, dafs die Systeme ähnlich liegen und die uneigentliche Gerade u_1 von ε Ort von Koincidenzpunkten U ist, nämlich von Punkten U_+ oder U_- je nachdem die Systeme direkt oder entgegengesetzt ähnlich liegen. Im letztern dieser beiden speziellen Fälle ist der eigentliche Punkt C gemeinschaftliche Mitte der Verbindungsstrecken PP' zweier einander entsprechender Punkte. Und im erstern ist dieser sonst immer eigentliche Punkt in der diesen Strecken PP' gemeinsamen Richtung ins Unendliche verschwunden, wenn die Systeme nicht zusammenfallen und also alle Punkte von ε Koincidenzpunkte sind.

Es ist ein Leichtes, die zwei imaginären uneigentlichen Koincidenzpunkte zweier positiv kongruenter ebener Systeme anzugeben. Weil nämlich die uneigentliche Gerade u_1 Koincidenzgerade ist und jedem Kreise des einen Systems ein Kreis des andern entspricht, so entsprechen die zwei *Kreispunkte* der Ebene ε sich selbst, und sind also diese Punkte die gesuchten Koincidenzpunkte.

Aufgabe 243. In welcher Beziehung steht der konstante Winkel PCP', unter welchem die Verbindungsstrecke PP' zweier einander entsprechender Punkte P, P' vom Koincidenzpunkte C aus erscheint, zu dem Doppelverhältnisse der projektiven Punktreihen auf u_1?

[Man vergleiche Clebsch-Lindemann's „*Vorlesungen über Geometrie*“, T. I, S. 148.]

Zwei negativ kongruente Systeme, welche in der nämlichen Ebene ε liegen, lassen bekanntlich immer eine Koincidenzgerade g (Fig. 62) zu, welche im allgemeinen, wenn sie kein Ort von Koincidenzpunkten ist, zwei positiv kongruente Punktreihen mit zwei in einem Punkte U_+ zusammenfallenden Doppelpunkten trägt. Aufserdem ist der den Senkrechten auf g gemeinsame Punkt immer ein Koincidenzpunkt U_-. Zwei negativ kongruente Systeme in der nämlichen Ebene lassen also immer zwei verschiedenartige einander senkrecht zugeordnete Koincidenzpunkte U_+, U_- zu; haben sie aufserdem einen eigentlichen Koincidenzpunkt

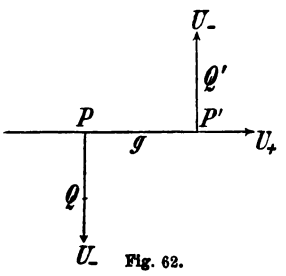


Fig. 62.

Digitized by Google

C, so liegen sie in Bezug auf die Gerade $C\,U_+$ symmetrisch, und sind alle Punkte dieser Gerade Koincidenzpunkte. Die Bemerkung, dafs auch hier die uneigentliche Gerade u_1 Koincidenzgerade ist und Kreisen wieder Kreise entsprechen, mufs jetzt, weil die Kreispunkte der Ebene ε keine Koincidenzpunkte sein können, zum Schlusse führen, dafs diese Punkte einander entsprechen. Und dies ist offenbar der Fall; denn die Systeme schneiden in u_1 eine Involution mit den einander senkrecht zugeordneten Doppelpunkten U_+, U_- ein.

Wir bestimmen nun weiter die uneigentlichen Koincidenzpunkte zweier kongruenter räumlicher Systeme im nämlichen Raume R_3, mit Inbegriff der bald$^{(111_3)}$ näher zu beleuchtenden Thatsache des paarweisen Vorkommens der getrennten imaginären Koincidenzpunkte U blofs mit Hilfe der vorhergehenden Betrachtungen über ebene Systeme. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, wo es keinen Ort von Koincidenzpunkten giebt. Hieraus kann dann unmittelbar geschlossen werden, dafs von den drei getrennten Koincidenzpunkten im U_2 von R_3 immer nur ein Punkt U reell ist. Erstens kann es nicht drei reelle Punkte U geben; denn unter der Voraussetzung dreier reeller Punkte U besteht von den drei aus ihnen zu bildenden Paaren wenigstens eines aus gleichartigen Punkten U, in welchem Falle die Verbindungsgerade ein Ort von Koincidenzpunkten ist. In Verbindung mit der Bemerkung über das Vorkommen der imaginären Punkte sind weiter die Fälle von zwei und keinem dieser reellen Punkte auszuschliefsen, mufs also immer ein einziger reeller Koincidenzpunkt U vorhanden sein.

Die uneigentliche Gerade u_1, welche im U_2 dem einzigen reellen Koincidenzpunkte U senkrecht zugeordnet ist, mufs nun Koincidenzgerade des Systems sein. Die in irgend einem Paare einander entsprechender Ebenen ε, ε' durch diese Gerade liegenden kongruenten ebenen Systeme müssen positiv kongruent sein; denn wären sie negativ kongruent, so würde u_1 zwei reelle Koincidenzpunkte, ein U_+ und ein U_-, tragen. Also ist der einzige reelle Punkt U ein U_+ oder ein U_-, je nachdem die räumlichen Systeme positiv oder negativ kongruent sind. Denn nimmt man in ε irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem OX, OY an, welchem in ε' das System $O'X'$, $O'Y'$ entspricht, so zeigt Vergleichung

Digitized by Google

der zwei einander entsprechenden Raumkoordinatensysteme $O(X, Y, U)$, $O'(X', Y', U)$, dafs eine Drehung des ersten um OU die Achsenpaare $(OX, O'X')$, $(OY, O'Y')$ gleichsinnig parallel machen kann, u. s. w.

Die Natur des einzigen Koincidenzpunktes U belehrt uns nun weiter über den eigentlichen Koincidenzpunkt. Es sind nämlich die Parallelbüschel der zu den Geraden durch U senkrechten Paare einander entsprechender Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ direkt oder entgegengesetzt kongruent, je nachdem dieser Punkt U ein U_+ oder ein U_- ist. Also giebt es nur bei negativ kongruenten räumlichen Systemen eine eigentliche Koincidenzebene $\varepsilon = \varepsilon'$, welche zwei einen Koincidenzpunkt C besitzende positiv kongruente ebene Systeme trägt. Und projiziert man bei zwei positiv kongruenten räumlichen Systemen, wo die durch u_1 gehenden sich entsprechenden Ebenen ε, ε' einen unveränderlichen Abstand von einander haben, für irgend ein Paar $\varepsilon, \varepsilon'$ dieser Ebenen das von ε' getragene ebene System auf ε, so erhält man in ε zwei positiv kongruente Systeme mit einem eigentlichen Koincidenzpunkte; die diesen Punkt mit U_+ verbindende Gerade ist die bekannte Schraubungsachse von Chasles. Bezeichnen wir die Kreispunkte der Ebenen durch u_1 mit ω_1, ω_2, so finden wir also:

bei positiv kongruenten Räumen ..... U_+, ω_1, ω_2,
bei negativ kongruenten Räumen ... $C, U_-, \omega_1, \omega_2$.

Es ist dann U_+ wieder als die Vereinigung von C mit U_- aufzufassen.

Aufgabe 244. Zähle die speziellen Fälle der Kongruenz zweier Räume ab.

[Unterdrückt man den allgemeinen Fall, so hat man: „Der Ort der Koincidenzpunkte zweier [positiv / negativ] kongruenter Räume ist entweder eine [eigentliche / uneigentliche] Gerade, oder eine [uneigentliche / eigentliche] Ebene, [oder / niemals] ein Raum.“]

111. **Die Koincidenzpunkte kongruenter Systeme im R_n.** Nennt man zwei Punkte konjugiert imaginär, wenn

Digitized by Google

ihre auf irgend welches System bezogenen Parallelkoordinaten konjugiert imaginäre Werte haben, so geht aus dieser Definition sofort hervor, dafs die Verbindungslinie zweier konjugiert imaginärer Punkte reell ist. Denn das Gleichungssystem

$$\frac{x_k - a_k - b_k\sqrt{-1}}{2b_k\sqrt{-1}} = \varrho, \ (k = 1, 2, \dots n)$$

der Gerade, welche die Punkte

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1},\ a_2 + b_2\sqrt{-1}, \dots, a_n + b_n\sqrt{-1}),$$
$$(a_1 - b_1\sqrt{-1},\ a_2 - b_2\sqrt{-1}, \dots, a_n - b_n\sqrt{-1})$$

mit einander verbindet, reduziert sich unmittelbar auf

$$\frac{x_k - a_k}{b_k} = \varrho', \ (k = 1, 2, \dots n).$$

Wir wenden dieses Resultat an, sowohl auf die Gruppe der $n+1$ getrennten Koincidenzpunkte überhaupt wie auf die Gruppe der n uneigentlichen Koincidenzpunkte zweier konjektiver kongruenter Systeme C_n, C_n'. Dazu beweisen wir zunächst, dafs die imaginären Punkte unter ihnen paarweise konjugiert imaginär sind.

Die $n+1$ getrennten Koincidenzpunkte des allgemeinen Falles zweier kollinearer Systeme C_n, C_n' im R_n werden mit Hilfe der Gleichung 74) gefunden. Diese Gleichung $B_{n+1,\sigma} = 0$ von der Ordnung $n+1$ in σ liefert, wie die Algebra lehrt, für σ teils reelle, teils Paare konjugiert imaginärer Wurzeln. Da nun zwei konjugiert imaginäre Werte von σ bei der Berechnung der Koordinaten der entsprechenden Koincidenzpunkte für jede dieser Koordinaten ebenfalls konjugiert imaginäre Werte liefern, so sind diese Punkte also auch teilweise reell, zum Teil paarweise konjugiert imaginär. Und zur Bestimmung aller Koincidenzpunkte U kann man die x_i in 79) unendlich grofs werden lassen, — was zur Folge hat, dafs die $b_{n+1,i}$ verschwinden, — und x' durch σx_i ersetzen. Elimination der x_i führt dann zur Gleichung $B_{n,\sigma} = 0$ und also wie oben zum verlangten Schlusse in Bezug auf die Realität der Koincidenzpunkte U. Aus beiden Schlüssen

Digitized by Google

folgt dann noch, dafs der nicht im U_{n-1} liegende Koincidenzpunkt immer reell sein mufs.

Aufgabe 245. War dies nicht abzuleiten aus der Thatsache, dafs zwei konjugiert imaginäre Punkte entweder beide eigentliche oder beide uneigentliche Punkte sind?

Wir betrachten nun die reelle Gerade u_1, welche zwei konjugiert imaginäre Koincidenzpunkte von C_n, C_n' verbindet, und bezeichnen wieder mit $\varepsilon, \varepsilon'$ zwei einander entsprechende durch u_1 gehende und also zu einander parallele Ebenen. Die in diesen Ebenen liegenden Systeme sind als entsprechende Figuren kongruenter Systeme C_n, C_n' ebenfalls kongruent. Allein negativ kongruent können sie nicht sein, weil diese zwei reelle Koincidenzpunkte U, ein U_+ und ein U_-, besitzen. Deshalb sind sie positiv kongruent, woraus wieder hervorgeht, dafs die gemeinschaftlichen Kreispunkte aller Ebenen durch u_1 die auf u_1 liegenden konjugiert imaginären Koincidenzpunkte sind. Und weiter beweist man leicht, dafs die den Paaren konjugiert imaginärer Koincidenzpunkte verbindenden Geraden u_1, u_1', ... einander zu je zwei senkrecht zugeordnet sind. Ist nämlich u_1 eine Koincidenzgerade von C_n, C_n', so ist der dieser u_1 senkrecht zugeordnete Raum U_{n-3} ein Koincidenzraum und mufs dieser Raum U_{n-3} $n-2$, d. h. alle übrigen Koincidenzpunkte der Systeme C_n, C_n' enthalten. Da nun der im R_3 geführte Beweis, dafs es keine drei reellen Koincidenzpunkte U geben kann, auch hier anwendbar ist, so findet man, dafs die Reduktion von U_{n-1} auf U_{n-3} mittels Ausscheidung eines Paares von Kreispunkten bei geradem n bis auf eine Gerade, bei ungeradem n bis auf eine Ebene durchgeführt werden kann, und erhält man also mit Hilfe der Ergebnisse der vorhergehenden Nummer den folgenden allgemeinen Satz:

Bezeichnet man positive und negative Kongruenz abkürzend mit K_+ und K_-, so giebt folgendes Schema die Koincidenzpunkte an:

α) $K_+, n = 2k, \ldots\ldots C_1$ *und* k *Paare von Kreispunkten,*
β) $K_+, n = 2k+1, \ldots. U_+$ „ „ „ „ „ ,
γ) $K_-, n = 2k, \ldots. U_+, U_-$ „ $k-1$ „ „ „ ,
δ) $K_-, n = 2k+1, \ldots C, U_-$ „ k „ „ „ .

Digitized by Google

Hierbei ist zu bemerken, daſs man immer ein rechtwinkliges Koordinatensystem erhält, wenn man in jeder der durch einen willkürlichen Punkt O und eine ein Paar von Kreispunkten tragende Gerade u_1 geführten Ebenen zwei durch O gehende rechtwinklige Achsen annimmt und diese Achsenpaare mittels der Verbindungslinien von O mit den reellen uneigentlichen Koincidenzpunkten zu einem Achsensysteme durch O ergänzt.

Aufgabe 246. Wie findet man den eigentlichen Koincidenzpunkt C zweier positiv kongruenter Systeme im R_{2k}, wenn die Verwandtschaft dadurch bestimmt ist, daſs zwei gegeben vorliegende kongruente Simplexe $S(2k)$ einander entsprechen sollen?

[Sind (A_i, A_i'), $i = 1, 2 \ldots, 2k$ die Paare einander entsprechender Eckpunkte der Simplexe, so ist C der Schnittpunkt der $2k$ Räume R_{2k-1}, welche die Strecken $A_i A_i'$ senkrecht halbieren.]

112. **Anwendungen und Beispiele.** Schreibt man für die vier Fälle des letzten Satzes in Bezug auf das dort erwähnte Koordinatensystem die Verwandtschaftsgleichungen hin, so findet man leicht die folgenden Sätze, für welche wir weiter nach zwei Sonderarbeiten, einer von A. E. Rahusen und einer vom Verfasser (*Annales de l'école polytechnique de Delft*, T. IV, S. 104—138, T. VII, S. 139—158) verweisen:

Die allgemeinste Ortsänderung im R_n ist für $n = 2k$ die Resultierende von k Drehungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ um einen bestimmten Punkt O in k zu je zwei zu einander senkrechten Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$. Und für $n = 2k + 1$ ist sie die Resultierende von k solchen Drehungen um einen Punkt O einer bestimmten Achse a, verbunden mit einer Verschiebung in der Richtung dieser Achse. In beiden Fällen ist das Endergebnis unabhängig von der Reihenfolge dieser partiellen Bewegungen.

Dieser Satz bildet die mehrdimensionale Verallgemeinerung der 1831 von Chasles entdeckten Schraubenbewegung.

Aufgabe 247. Wie findet man die Richtung dieser Achse a zweier positiv kongruenter Systeme im R_{2k+1}, wenn die Verwandtschaft dadurch bestimmt ist, daſs zwei gegeben vorliegende kongruente Simplexe $S(2k + 1)$ einander entsprechen sollen?

Digitized by Google

[Sind (A_i, A_i'), $i = 1, 2, \ldots, 2k+1$ die Paare einander entsprechender Eckpunkte der Simplexe und die $2k+1$ von irgend einem Punkte O ausgehenden Strecken OA_i'' den Strecken A_iA_i' equipollent, so giebt das aus O auf den durch die $2k+1$ Punkte A_i'' bestimmten Raum R_{2k} gefällte Lot Richtung und Gröfse der Translation an.]

Ein System C_n von R_n kann mittels einer Bewegung in irgend einem R_{n+1} durch R_n mit irgend einem in R_n gegebenen zu C_n negativ kongruenten Systeme C_n zur Deckung gebracht werden. Diese Bewegung ist die Resultierende für $n = 2k$ von k, und für $n = 2k+1$ von $k+1$ Drehungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, von welchen eine in beiden Fällen einen gestreckten Winkel beträgt, und zwar in zu je zwei zu einander senkrechten Ebenen. Auch hier ist die Reihenfolge dieser partiellen Bewegungen irrelevant.

Aufgabe 248. Versinnliche zum guten Begriffe dieses Satzes die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 249. Wie würde ein aussen schwarzer, gelb gefütterter linker Handschuh nach einer solchen Umlegung in der vierten Dimension aussehen?

[Er geht in einen rechten Handschuh der nämlichen Art über, welcher wieder aussen schwarz, innen gelb ist; er wird also — vergleiche die Umlegung eines rechtwinkligen Dreiecks mit ungleichen Katheten — nicht umgestülpt.]

Aufgabe 250. Ein System C_4 wird so um den Ursprung O eines in R_4 gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystems gedreht, dafs die Projektionen P_{12}, P_{34} irgend eines Punktes P in $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$ gleichförmige Kreisbewegungen ausführen, deren Winkelgeschwindigkeiten v_{12}, v_{34} sich verhalten wie die ganzen Zahlen n_{12}, n_{34}. Welche Bahn durchläuft die Projektion P_{23} dieses Punktes?

[Die Bahn von P_{23} ist eine Lissajous'sche Kurve; denn die Bewegung von P_{23} ist die Resultierende der Bewegungen der Projektionen P_2 und P_3 auf OX_2 und OX_3, welche Bewegungen projizierte gleichförmige Kreisbewegungen (Vibrationen) sind.]

Aus dem oben studierten allgemeinen Falle kongruenter Systeme im R_n läfst man alle speziellen Fälle, die überhaupt

Digitized by Google

möglich sind, hervortreten, indem man 1^0 durch Drehung einige Paare konjugiert imaginärer Koincidenzpunkte durch Geraden u_1 von Koincidenzpunkten ersetzt, und 2^0 durch Verschiebung einen eigentlichen Koincidenzpunkt hervorruft, wenn dieser nicht schon vorhanden ist. Bedenkt man nun, dafs bei beiden Arten von Kongruenz ein eigentlicher Koincidenzpunkt und eine uneigentliche Gerade von Koincidenzpunkten eine Ebene von Koincidenzpunkten, zwei uneigentliche Geraden von Koincidenzpunkten einen uneigentlichen Raum von Koincidenzpunkten bestimmen, so findet man leicht folgenden Satz:

Der Ort der Koincidenzpunkte zweier $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right]$ *kongruenter Systeme* C_n, C_n' *ist entweder ein Raum* $\left[\begin{matrix}R_{n-2k}\\ R_{n-2k-1}\end{matrix}\right]$ *oder ein Raum* $\left[\begin{matrix}\overline{U}_{n-2k}\\ \overline{U}_{n-2k-1}\end{matrix}\right]$.

Legt man von den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eines Punktes P den $x_1, x_2, \ldots, x_k$ das entgegengesetzte Vorzeichen bei, so erhält man die Koordinaten eines neuen Punktes P', der im Falle eines rechtwinkligen Achsensystems mittels der k Spiegelungen in den den Achsen $OX_1, OX_2, \ldots, OX_k$ gegenüberliegenden Koordinatenräumen R_{n-1} aus P hervorgeht. Da nun zwei mit einem nämlichen Systeme C_n symmetrische Systeme positiv kongruent sind, so wird P', wenn P ein System C_n durchläuft, ein mit C_n positiv oder negativ kongruentes System C_n' beschreiben, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle kann man diese Transformation von C_n in C_n' eine halbe Umdrehung um den Raum $O(X_{k+1} X_{k+2} \ldots X_n)$, im zweiten Falle kann man sie eine Spiegelung in Bezug auf diesen Raum nennen. Ueber diese und verwandte Fragen vergleiche man — zunächst für den gewöhnlichen Raum — die wertvolle Abhandlung E. Study's „Von den Bewegungen und Umlegungen" (*Math. Ann.*, Bd. 39, S. 442—566, 1891), welcher wir den Ausdruck „Umlegung" entnommen haben.

Aufgabe 251. Wenn es nur darauf ankommt, einen Unterschied zu charakterisieren, so könnte man die direkt kongruenten Systeme ebenso gut negativ kongruent, die entgegengesetzt kongruenten Systeme dann natürlich positiv kongruent nennen; weshalb ist dies nicht zu empfehlen?

Digitized by Google

[Weil nicht $(+1)\times(+1)=(-1)$, sondern $(-1)\times(-1)=(+1)$ ist.]

Aufgabe 252. Welchen Effekt hat die Zeichenänderung der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_k$, wenn die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ homogene Koordinaten eines Punktes P im R_n sind?

[Es wird dann ein zu dem von P durchlaufenen Systeme C_n involutorisch geschartes System C_n' von Punkten P' erzeugt.]

Aufgabe 253. Zwei konjektive Systeme C_n, C_n' sind einander Punkt für Punkt so zugeordnet, dafs ein gegebener Punkt O die gemeinschaftliche Mitte aller von zwei einander entsprechenden Punkten P, P' begrenzten Strecken PP' ist. Welche Verwandtschaft besteht zwischen diesen Systemen?

[Wir nennen diese positiv oder negativ kongruenten Systeme, je nachdem n gerade oder ungerade ist, in beiden Fällen zu einander symmetrisch in Bezug auf O.]

Aufgabe 254. Der Ort der Mitte P'' der von den einander entsprechenden Punkten P, P' zweier kongruenter Systeme C_n, C_n' begrenzten Strecken PP' ist im allgemeinen ein zu C_n, C_n' affines System C_n'' oder ein Raum R_{n-1}, je nachdem C_n, C_n' positiv oder negativ kongruente Systeme sind. Man fragt den Beweis.

[Der analytische Beweis mittels der Gleichungen 79) ist äufserst einfach. Durch Einsetzung in die allgemeinen Gleichungen $2x_i'' = x_i + x_i'$ erhält man:

$$2x_i'' - b_{n+1,i} = b_{1,i}x_1 + b_{2,i}x_2 + \ldots + b_{i-1,i}x_{i-1} + (b_{i,i}+1)x_i + b_{i+1,i}x_{i+1} + \ldots + b_{n,i}x_n$$

und nun verschwindet die Determinante der rechten Seiten, welche wir — vergleiche die Gleichungen 81) und ihre Determinante $B_{n,1}$ — mit $B_{n,-1}$ bezeichnen, im Falle der negativen Kongruenz von C_n, C_n'. Denn das Produkt der Determinanten B_n und $B_{n,-1}$ liefert $B_{n,-1}$ und die Beziehung $B_n B_{n,-1} = B_{n,-1}$ bedingt das Nullwerden von $B_{n,-1}$ für $B_n = -1$. Also liefern diese Gleichungen ein System C_n'' affin zu den positiv kongruenten C_n, C_n', und giebt Elimination der x_i bei negativ kongruenten C_n, C_n' einen R_{n-1} als Ort der Mitte P''.

Digitized by Google

Wir skizzieren noch einen geometrischen Beweis. Sind die gegebenen Systeme positiv kongruent, so entsprechen die Punkte P, P'' einander eindeutig; denn das zu C_n in Bezug auf einen beliebig gewählten Punkt P'' symmetrische System ist positiv oder negativ kongruent zu C_n und also auch zu C_n', je nachdem — vergleiche die vorhergehende Aufgabe — n gerade oder ungerade ist, bestimmt also in beiden Fällen mit C_n' einen einzigen eigentlichen Koincidenzpunkt P', welchem eine in P'' halbierte Strecke PP' angehört. Und wenn P und P' zwei einander entsprechende Geraden g und g' beschreiben, so durchläuft die Mitte P'' im durch g und g' bestimmten Raume bekanntlich ebenfalls eine Gerade g''; aufserdem entspricht einem uneigentlichen Punkte P allemal wieder ein uneigentlicher Punkt P''. Und sind die gegebenen Systeme negativ kongruent, so besitzen sie einen Koincidenzpunkt U_-; ist der Raum U_{n-2} diesem Punkte senkrecht zugeordnet, so entsprechen deshalb auch die Parallelräume R_{n-1} durch diesen U_{n-2} in C_n den Parallelräumen R_{n-1}' durch diesen U_{n-2} in C_n' und mufs wegen des Charakters von U_- die Bewegung der einander entsprechenden Räume R_{n-1}, R_{n-1}' dieser gleichen Büschel in entgegengesetzten Richtungen geschehen, woraus dann hervorgeht, dafs der den Abstand zwischen zwei einander entsprechenden parallelen Räumen R_{n-1}, R_{n-1}' halbierende Raum R_{n-1}'' immer mit dem eigentlichen Koincidenzraume beider Büschel zusammenfällt.]

113. **Ähnlichkeit.** Obgleich die eingehende Untersuchung ähnlicher Figuren dem zweiten Teile dieses Buches vorbehalten bleibt, so mögen hier schon einige einfache mit der Kollinearität in Verbindung stehende Betrachtungen ihren Platz finden; der Kürze halber beschränken wir sie auf konjektive Systeme.

Zwei kollineare Systeme C_n, C_n' im R_n, welche den uneigentlichen Raum U_{n-1} von R_n zu einem Orte von Koincidenzpunkten haben, besitzen die Eigenschaft, dafs zwei einander entsprechende Strecken PQ und $P'Q'$ immer parallel sind und in dem nämlichen Gröfsenverhältnisse zu einander stehen. Solche Systeme nennt man *ähnlich* und *ähnlich liegend*. Erteilt man einem der beiden Systeme irgend eine drehende Bewegung, so wird der Parallelismus der entsprechenden

Digitized by Google

Strecken PQ, $P'Q'$ aufgehoben, während das konstante Gröfsenverhältnis dieser Strecken bestehen bleibt. Deshalb heifsen die Systeme dann nur noch *ähnlich*. Rücksichtlich dieser beiden Qualifikationen kann der Unterschied zwischen positiv und negativ zur Geltung kommen. Wir sagen nämlich, dafs zwei ähnliche und ähnlich liegende Systeme eine positiv oder negativ ähnliche Lage haben, je nachdem die Koincidenzpunkte im U_{n-1} Punkte U_+ oder Punkte U_- sind. Hingegen nennen wir zwei ähnliche Systeme C_n, C'_n positiv oder negativ ähnlich, je nachdem es zu C_n positiv oder negativ kongruente Systeme giebt, welche mit C'_n eine positiv ähnliche Lage haben. Also sind positiv ähnlich liegende Systeme immer positiv ähnlich, jedoch negativ ähnlich liegende Systeme entweder positiv oder negativ ähnlich je nachdem n gerade oder ungerade ist. Woraus dann zu gleicher Zeit hervorgeht, dafs negativ ähnliche Systeme C_{2n}, C'_{2n} im R_{2n} nicht in ähnliche Lage gebracht werden können.

Aufgabe 255. Beweise, dafs negativ ähnliche Systeme C_{2n}, C'_{2n} in einem durch ihren gemeinschaftlichen Träger R_{2n} gehenden Raume R_{2n+1} mittels Umlegung eines dieser Systeme die negative Eigenschaft, nicht in ähnliche Lage gebracht werden zu können, verlieren.

Aufgabe 256. Beweise, dafs zwei positiv ähnliche Systeme C_{2n}, C'_{2n} im R_{2n} und zwei negativ ähnliche Systeme C_{2n+1}, C'_{2n+1} im R_{2n+1} im allgemeinen einen eigentlichen Koincidenzpunkt C zulassen.

Aufgabe 257. Man ordnet die Punkte P, P' mit den Systemen von Parallelkoordinaten

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots, \varrho x_n)$$

einander zu. Welche Verwandtschaft beherrscht die von den Punkten P, P' durchlaufenen Systeme?

[Man denke an die zwei Bifurkationen: n gerade oder ungerade, ϱ positiv oder negativ.]

114. **Die allgemeinste Reciprocität.** Hat man in R_m ein System von homogenen Punktkoordinaten t_i und in einem andern Raume R'_m der nämlichen Dimensionenzahl ein System von homogenen Raumkoordinaten τ'_i angenommen,

Digitized by Google

so kann man dem Punkte P von R_m mit den Punktkoordinaten t_i den Raum R'_{m-1} von R'_m mit den durch die $m+1$ Gleichungen

$$\sigma\tau'_i = c_{1,i}\,t_1 + c_{2,i}\,t_2 + \ldots + c_{m+1,i}\,t_{m+1} \qquad 82)$$

bestimmten Raumkoordinaten τ'_i zuordnen. Dadurch ist dann zwischen den Räumen R_m, R'_m eine reciproke Verwandtschaft hergestellt, sobald man zwei Räume R_m, R'_m reciprok verwandt nennt, wenn zwischen den Punkten P von R_m und den Räumen R'_{m-1} von R'_m eine solche eindeutige Verwandtschaft besteht, dafs den Punkten P eines Raumes R_{m-k} von R_m allemal wieder durch einen Raum R'_{k-1} hindurchgehende Räume R'_{m-1} von R'_m entsprechen. Denn es entsprechen vermöge der Gleichungen 82) nicht nur den Punkten P von R_m Räume R'_{m-1} von R'_m, sondern es sind auch den Punkten P' von R'_{m-1} umgekehrt wieder Räume R_{m-1} von R_m zugeordnet. Es befriedigen dann nämlich, wenn die τ'_i des Raumes R'_{m-1} von R'_m der linearen Gleichung $\sum_{i=1}^{m+1} s_i\tau'_i = 0$ Genüge leisten, die t_i des entsprechenden Punktes P von R_m die ebenfalls lineare Gleichung $\sum_{i=1}^{m+1} s_i \sum_{k=1}^{m+1} c_{k,i}\,t_k = 0$, u. s. w.

Aus der Zahl der in den Gleichungen 82) auftretenden Koeffizienten $c_{i,k}$ folgt nun wieder [101a] der allgemeine Satz:

Sollen zwei Räume R_m, R'_m reciprok auf einander bezogen werden, so darf man $m+2$ beliebigen Punkten P von R_m, von welchen nicht $m+1$ in einem R_{m-1} liegen, irgend $m+2$ Räume R'_{m-1} von R_m, von welchen nicht $m+1$ durch einen Punkt gehen, als entsprechende zuordnen, womit dann jedem Punkte von R_m ein bestimmter Raum R'_{m-1} von R'_m zugeordnet ist.

Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man von zwei kollinearen Systemen C_m, C'_m in R_m, R'_m ausgeht und nun C'_m mittels einer Orthogonalitätsverwandtschaft in R'_m in ein System C''_m transformiert.

Die Gleichungen 82) vereinfachen sich zu

$$\sigma\tau'_i = t_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1) \qquad 83)$$

Digitized by Google

wenn man die den Eckpunkten des Koordinatensimplex $S(m+1)$ von R_m entsprechenden Räume R'_{m-1} von R'_m als entsprechende Seitenräume des Koordinatensimplex $S'(m+1)$ von R'_m, und den dem Einheitspunkte des Koordinatensystems von R_m entsprechenden Raum R'_{m-1} von R'_m als Einheitsraum des Koordinatensystems von R'_m annimmt.

Sind die Räume R_m, R'_m einem dritten Raume R''_m reciprok, so erzeugt man zwischen ihnen eine kollineare Verwandtschaft, wenn man die einem nämlichen Elemente von R''_m entsprechenden Elemente einander zuordnet.

Aufgabe 258. Weshalb kann man die Transformation von zwei kollinearen Systemen in einander eine positive, die Transformation von zwei reciproken Systemen in einander eine negative Operation nennen?

115. **Incidenzelemente konjektiver reciproker Systeme. Involutorische Lage.** Wir setzen nun weiter voraus, die Räume, welche die reciproken Systeme tragen, fallen zusammen, d. h. die reciproken Systeme seien konjektiv. Dabei mögen dann zur Vereinfachung die den Gleichungen 82) zu Grunde liegenden Koordinatensysteme zusammenfallende Simplexe haben. Ausserdem ersetzen wir m durch n, indem wir den Operationsraum R_n als Träger betrachten, und bezeichnen zur Unterscheidung von kollinear verwandten Systemen die in R_n auftretenden reciprok oder dual verwandten Systeme mit D_n, D'_n.

Wir fragen nun zunächst nach dem Orte der Punkte P von D_n, welche in den ihnen entsprechenden Räumen R'_{n-1} von D'_n liegen, und setzen zu diesem Zwecke die Werte der τ'_i von 82) in die Bedingungsgleichung $\sum_{i=1}^{n+1} \tau'_i t_i = 0$ ein. So erhalten wir

$$\Sigma c_{i,i} t_i^2 + \Sigma (c_{i,k} + c_{k,i}) t_i t_k = 0. \qquad 84)$$

Deshalb ist der gesuchte Ort zwar ein Gebilde von $n-1$ Dimensionen, aber kein lineares, sondern ein gebogenes, weil die Gleichung 84) eine quadratische Gleichung in den t_i ist. Natürlich ist das Studium dieses Ortes zweiter Ordnung hier nicht am Platze. Also stellen wir zu weiteren Zwecken

Digitized by Google

hier nur die Frage, ob der Ort der Punkte P' von D'_n, welche in den ihnen entsprechenden Räumen R_{n-1} von D_n liegen, mit dem gefundenen Orte identisch ist. Geometrisch leuchtet sofort ein, dafs dies wirklich der Fall sein mufs. Und analytisch gelangt man zum nämlichen Resultate mittels der Bemerkung, dafs die Gleichungen 82) zu den Gleichungen

$$\sigma' \tau_i = c_{i\,1} t'_1 + c_{i,2} t'_2 + \ldots + c_{i,n+1} t'_{n+1} \qquad 85)$$

zwischen den Koordinaten τ_i, t'_i der einander entsprechenden Elemente R_{n-1}, P' von D_n, D'_n führen. Denn dieses neue System, dessen Determinante mittels *Transposition*, d. h. durch Verwechselung von Zeilen und Kolonnen, aus der Determinante des Systems 82) hervorgeht, zeigt, dafs Verwechselung von $c_{i,k}$ und $c_{k,i}$ den einen Ort in den andern transformiert; allein diese Vertauschung läfst die Gleichung 84) des Ortes intakt.

Es entsprechen irgend einem Punkte im allgemeinen zwei verschiedene Räume R_{n-1}, wenn man ihn einmal als Punkt von D_n und nachher als Punkt von D'_n betrachtet. Nur in ganz besonderen Fällen entsprechen irgend einem Punkte P allemal zwei zusammenfallende Räume R_{n-1}; man sagt dann, die reciproken Systeme D_n, D'_n liegen *involutorisch*. Diese besondere Lage trifft zu, sobald den Eckpunkten eines Simplex $S(n+1)$ von D_n in D'_n die gegenüberliegenden Seitenräume R_{n-1} des nämlichen Simplex zugeordnet sind, in welchem Falle diese Elemente einander offenbar in doppelter Weise entsprechen. Der Beweis dieser Behauptung wird wieder mittels der Schlufsweise von $n-1$ auf n geführt. Ist nämlich A_1 ein Eckpunkt, $R^{(1)}_{n-1}$ der A_1 gegenüberliegende Seitenraum des $S(n+1)$, entspricht weiter dem Punkte P von D_n der Raum R'_{n-1} von D'_n und ist P_1 die centrale Projektion von P aus A_1 auf $R^{(1)}_{n-1}$, $R'^{(1)}_{n-2}$ der Schnitt von R'_{n-1} mit $R^{(1)}_{n-1}$, so entspricht der Gerade $A_1 P_1$ von D_n der Raum $R'^{(1)}_{n-2}$ von D'_n und ist also dem Sterne $S_{1,n-1}$ der Geraden $A_1 P_1$ durch A_1 der Stern $\Sigma_{n-2,n-1}$ der Räume $R'^{(1)}_{n-2}$ in $R^{(1)}_{n-1}$ reciprok. Also ist dies in $R^{(1)}_{n-1}$ auch der Fall mit dem Sterne $\Sigma_{n-2,n-1}$ der Räume $R'^{(1)}_{n-2}$ und dem Sterne $S_{0,n-1}$ der Punkte P_1. Allein der Voraussetzung zufolge, dafs der zu beweisende Satz schon für zwei

Digitized by Google

konjektive reciproke Gebilde von $n-1$ Dimensionen gelte, haben diese Sterne $S_{0,n-1}$, $\Sigma_{n-2,n-1}$ in $R^{(1)}_{n-1}$ involutorische Lage; denn den von A_1 verschiedenen Eckpunkten A_2, $A_3, \ldots, A_{n+1}$ des Simplex $S(n+1)$, welche im $R^{(1)}_{n-1}$ die Eckpunkte eines $S(n)$ bilden, entsprechen als Elemente von $S_{0,n-1}$ die gegenüberliegenden Seitenräume R_{n-2} dieses $S(n)$ als Elemente von $\Sigma_{n-2,n-1}$. Also ergiebt sich, dafs die zwei irgend einem Punkte P von R_n entsprechenden Räume R_{n-1} von irgend einem Seitenraume $R^{(i)}_{n-1}$ des $S(n+1)$ in dem nämlichen $R^{(i)}_{n-2}$ geschnitten werden und also zusammenfallen, wenn der in Rede stehende Satz für reciproke Gebilde von $n-1$ Dimensionen bewiesen ist. Oder kürzer gefafst: der Satz gilt für n, sobald er für $n-1$ erhärtet ist. Nun gilt er bekanntlich für $n=2$; also ist er allgemein bewiesen.

Die Vergleichung der Gleichungssysteme 82) und 85) lehrt auch unmittelbar, unter welchen Umständen die Systeme D_n und D'_n involutorisch liegen. Denn irgend einem nämlichen Wertsysteme der t_i und t'_i entsprechen offenbar nur dann einander proportionale Wertsysteme der τ'_i und τ_i, wenn die Determinante der Verwandtschaftsgleichungen entweder symmetrisch ($c_{i,k} = c_{k,i}$) oder schief symmetrisch ($c_{i,k} = -c_{k,i}$, $c_{i,i} = -c_{i,i} = 0$) ist. Wir betrachten jeden dieser beiden Fälle für sich.

116. **Polarsysteme.** Gelten allgemein die Beziehungen $c_{i,k} = c_{k,i}$, so werden beide zu einander reciproke Systeme als ein einziges System aufgefafst, welchem man den Namen *Polarsystem* beilegt; die einander entsprechenden Elemente Punkt und Raum R_{n-1}, Gerade und Raum R_{n-2}, ... werden dann beziehungsweise als Pol und Polarraum R_{n-1}, Polare und Polarraum R_{n-2}, ... bezeichnet. Ein solches Polarsystem läfst noch einen Ort

$$\Sigma c_{i,i} t_i^2 + 2\Sigma c_{i,k} t_i t_k = 0 \qquad 86)$$

von in ihren Polarräumen liegenden Polen zu.

Auch aus den Gleichungen 82) geht hervor, dafs zwei reciproke Systeme ein Polarsystem bilden, sobald die Eckpunkte eines $S(n+1)$ den Gegenräumen R_{n-1} dieses Gebildes entsprechen. Denn legt man dieses $S(n+1)$ den

Digitized by Google

Koordinatensystemen t_i, τ'_i zu Grunde, so verschwinden alle $c_{i,k}$, für welche $i \neq k$ ist. Mittels geeigneter Wahl von Einheitspunkt und Einheitsraum können die Gleichungen 82) dann auf die Form 83) gebracht werden.

Jedes Simplex $S(n+1)$, dessen einander gegenüberliegende Elemente zu einander zugehörige Polarräume sind in Bezug auf ein gegebenes Polarsystem, wird ein *Polsimplex* des Polarsystems genannt. Von den Eckpunkten eines Polsimplex kann der erste A_1 ganz willkürlich angenommen werden, der zweite A_2 willkürlich im Polarraume R_{n-1} von A_1, der dritte A_3 willkürlich im Polarraume R_{n-2} von $A_1 A_2$, u. s. w.

Aufgabe 259. Beweise, dafs ein Polarsystem im R_n nach der Voraussetzung der Aufgaben 2—6, 9—16, 59, 60, 212—216 eine Anzahl von

$$\frac{(m^{n+1}-1)\,(m^n-1)\,(m^{n-1}-1)\ldots(m^2-1)}{(n+1)\,!\,(m-1)^n}$$

Polsimplexen enthält.

Aufgabe 260. Wird ein $S(n+1)$ als Polsimplex angenommen und noch irgend einem nicht in einem Seitenraume R_{n-1} von $S(n+1)$ liegenden Punkte P ein bestimmter nicht durch einen Eckpunkt von $S(n+1)$ gehender Raum R_{n-1} zugeordnet, so ist ein Polarsystem bestimmt. Man wünscht den Beweis.

Liegt im R_n ein Polarsystem mit den einander entsprechenden Elementenpaaren (P, R_{n-1}) gegeben vor und ist R'_{n-1} irgend ein gegebener Raum mit $n-1$ Dimensionen im R_n, so kann man sich auf die Betrachtung der in diesem R'_{n-1} liegenden Punkte P beschränken und diesen Punkten im R'_{n-1} als Operationsraume im engeren Sinne die Schnitträume R_{n-2} von R'_{n-1} mit den entsprechenden Räumen R_{n-1} zuordnen. Auf diese Weise entsteht dann im R_{n-1} ein Polarsystem mit den einander entsprechenden Elementenpaaren (P, R_{n-2}), welches als Schnitt von R'_{n-1} mit dem gegebenen Polarsysteme bezeichnet werden kann. Oder aber, man kann seine Aufmerksamkeit beschränken auf die durch einen gegebenen Punkt P' gehenden Räume R_{n-1} und diesen Räumen in dem Sterne um den Punkt P' herum die

Digitized by Google

Verbindungsgeraden g von P' mit den entsprechenden Punkten P zuordnen, durch welche Zuordnung um P' herum ein Polarsystem mit den einander entsprechenden Elementenpaaren (g, R_{n-1}) entsteht, welches die Projektion des gegebenen Polarsystems aus P' heifsen mag. So fortfahrend kann man das gegebene Polarsystem (P, R_{n-1}) sowohl durch irgend einen Raum R'_{n-m} schneiden wie aus irgend einem Raume R'_m projizieren.

Aufgabe 261. Die $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Paare einander gegenüberliegender Kanten g und Seitenräume R_{n-1} eines vollständigen räumlichen $n+2$-Ecks im R_n werden von einem beliebigen nicht durch einen Eckpunkt gehenden Raume R'_{n-1} in $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Paaren einander zugeordneter Elemente (P, R_{n-2}) eines Polarsystems geschnitten. Man wünscht den Beweis.

[Man betrachte $n+1$ der Eckpunkte des $n+2$-Ecks als Eckpunkte eines Polsimplex eines Polarsystems, in welchem der übrig bleibende $n+2^{\text{te}}$ Eckpunkt dem gegebenen Raume R'_{n-1} entspricht und schneide dieses Polarsystem (P, R_{n-1}) durch R'_{n-1} in einem (P, R_{n-2}), u. s. w.]

Aufgabe 262. Was erhält man, wenn man die $\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n$ Paare einander gegenüberliegender Seitenflächen und Seitenräume R_{n-2} eines vollständigen räumlichen $n+2$-Ecks mit einem beliebigen nicht durch einen Eckpunkt gehenden R'_{n-2} schneidet?

Aufgabe 263. Wie lauten die den beiden vorhergehenden Aufgaben dual entgegengesetzten Aufgaben?

Obenstehende Betrachtungen verbinden zwei früher von uns erwähnte Verwandtschaften mit einander, die Verwandtschaft der einander senkrecht zugeordneten uneigentlichen Räume[84] und die Orthogonalitätsverwandtschaft[98], welche sich beide als Polarsysteme kennzeichnen. Es ist nämlich die erste der gemeinschaftliche Schnitt des uneigentlichen Raumes U_{n-1} mit allen Orthogonalitätsverwandtschaften im R_n. Wir können die Orthogonalitätsverwandtschaft also kennzeichnen als ein Polarsystem mit der besonderen Eigen-

Digitized by Google

schaft, vom U_{n-1} in der Verwandtschaft der einander senkrecht zugeordneten Räume geschnitten zu werden. Wie aus der Theorie der quadratischen Räume von $n-1$ Dimensionen hervorgeht, steht diese Eigenthümlichkeit in Verbindung mit der Thatsache, dafs der Ort der in ihren Polarräumen liegenden Punkte bei der Orthogonalitätsverwandtschaft ein Kugelraum ist; allein auf diese fast elementaren Betrachtungen können wir hier nicht eingehen.

117. **Analytische Erzeugung des Nullsystems.** Ist die Determinante der Gleichungen 82) schief symmetrisch, so verschwindet die linke Seite der Gleichung 84) identisch und liegt also jeder Punkt P von D_n in dem ihm entsprechenden Raume R'_{n-1} von D'_n. Allein diese merkwürdige Lage kann nur bei reciproken Systemen ungerader Dimensionenzahl auftreten. Denn für gerades n ist die schief symmetrische Determinante der $c_{i,k}$ ungeraden Grades und eine solche Determinante verschwindet, weil Transposition allen Elementen das entgegengesetzte Vorzeichen erteilt, d. h. die Determinante mit einer ungeraden Potenz der negativen Einheit multipliziert. Diese nur in Räumen R_{2n-1} ungerader Dimensionenzahl möglichen involutorischen reciproken Systeme, für welche der Ort der in den ihnen entsprechenden Polarräumen R_{n-1} liegenden Punkte P unbestimmt geworden ist, werden *Nullsysteme* oder *Fokalsysteme* genannt. Anstatt von Pol und Polarraum spricht man hier auch von *Nullpunkt* und *Nullraum*, oder von *Fokus* (Brennpunkt) und *Fokalraum* (Brennraum).

Sind in dem Falle $n=3$ und $2n-1=5$ die drei Punkte P, P', P'' im Operationsraume R_5 willkürlich gewählt und entsprechen ihnen die Räume R_4, R'_4, R''_4, so entspricht der Gerade $g=(P'P'')$ der Schnittraum $R_3=(R'_4 R''_4)$, und der Ebene $\varepsilon=(PP'P'')$ die Schnittebene $R_2=(R_4 R'_4 R''_4)$; dabei liegt g dann nicht im entsprechenden Raume R_3 und ist ε zu der entsprechenden Ebene windschief. Wählt man P' aber in R_4, so geht R'_4 durch P und liegt die Gerade $g=(PP')$ in dem ihr entsprechenden Raume R_3; diese einander zugeordneten Elemente g, R_3 mögen dann *Leitstrahl* und *Leitraum* des Nullsystems heifsen. Hängen weiter die nicht in der nämlichen Gerade liegenden Punkte P, P', P'' derart zusammen, dafs jeder dieser Punkte den Räumen R_4

Digitized by Google

der beiden andern angehört, so entspricht die Ebene $(PP'P'')$ sich selbst und wird sie eine *Leitebene* des Nullsystems genannt. Und hieraus geht deutlich genug hervor, was man im allgemeinen Falle des Nullsystems im R_{2n-1} unter *Leitelementen* zu verstehen hat.

Aufgabe 264. Beweise, dafs ein Nullsystem N_{2n-1} im R_{2n-1} durch $2n+1$ willkürlich angenommene Leiträume R_{n-1} bestimmt ist.

[Unter den Beziehungen $c_{i,k} = -c_{k,i}$, $c_{i,i} = 0$ enthalten die Gleichungen 82) eine Anzahl von $n(2n-1)$ Koeffizienten $c_{i,k}$ mit $(2n+1)(n-1)$ von einander unabhängigen Verhältnissen. Und die Bedingung, dafs ein Raum R_{n-1} ein Leitraum sei, ist offenbar eine $n-1$-fache.]

Aufgabe 265. Beweise, dafs ein Nullsystem N_{2n-1} im R_{2n-1}, nach der Voraussetzung der Aufgaben 2—6, 9—16, 59, 60, 212—216, 259, für $0 < k < n$:

$$\frac{(m^{2n}-1)(m^{2n-2}-1)\ldots.(m^{2n-2k-2}-1)(m^{2n-2k}-1)}{(m^{k+1}-1)(m^{k}-1)\ldots.\qquad\qquad(m^{2}-1)(m-1)}$$

Leiträumen R_k enthält.

[Ist μ_p die Zahl der Leiträume R_p, so beweise man zunächst die rekurrente Beziehung $\mu_{p+1} = \frac{m^{2n-2p-2}-1}{m^{p+2}-1}\,\mu_p$ folgendermafsen. Entspricht dem Leitraume R_p der Leitraum R_{2n-p-2} durch R_p, so ist jeder Raum R_{p+1} durch R_p in R_{2n-p-2} ebenfalls ein Leitraum und umgekehrt jeder Leitraum R_{p+1} durch R_p auch im R_{2n-p-2} enthalten. Schneidet man diese Figur durch einen zu R_p windschiefen Raum $R_{2n-2p-3}$, der mit R_p den Raum R_{2n-p-2} bestimmt, so ergiebt sich, dafs die Zahl der Räume R_{p+1} durch R_p in R_{2n-p-2} der Zahl der Punkte von $R_{2n-2p-3}$ gleich ist; d. h. durch einen gegebenen Leitraum R_p gehen $\frac{m^{2n-2p-2}-1}{m-1}$ Leiträume R_{p+1}. Da nun umgekehrt jeder in einem Leitraume R_{p+1} liegende Raum R_p Leitraum ist, so ist jeder Leitraum R_{p+1} im Produkte $\frac{m^{2n-2p-2}-1}{m-1}\,\mu_p$ so oft

Digitized by Google

enthalten wie die Zahl der in einem R_{p+1} liegenden Räume R_p oder Punkte beträgt, d. h. $\frac{m^{p+2}-1}{m-1}$-mal. Also gilt wirklich die erwähnte rekurrente Beziehung. Und nun ist die Zahl μ_1 der Leitstrahlen offenbar das Produkt der Zahl $\frac{m^{2n}-1}{m-1}$ der Punkte von R_{2n-1} in die Zahl $\frac{m^{2n-2}-1}{m-1}$ der Geraden durch einen Punkt in einem R_{2n-2} durch diesen Punkt, dividiert durch die Zahl $\frac{m^2-1}{m-1}$ der Punkte einer Gerade, d. h. man hat

$$\mu_1 = \frac{(m^{2n}-1)\ (m^{2n-2}-1)}{(m^2-1)\quad (m-1)},$$

was in Verbindung mit der rekurrenten Formel die verlangte Beziehung liefert.

Für $k > n-1$ gilt dieses Resultat nicht mehr; denn in diesem Falle darf nicht mehr behauptet werden, dafs jeder R_p in einem Leitraume R_{p+1} ein Leitraum sei.]

118. **Geometrische Erzeugung des Nullsystems.** Wir beweisen den folgenden Satz:

Ist im Raume R_{2n-1} ein willkürliches einfaches $2n+1$-Eck gegeben und nennt man einen Eckpunkt P und eine Kante g dieses Gebildes E einander gegenüberliegend, sobald g auf beiden Seiten durch die nämliche Anzahl von Eckpunkten von P getrennt wird, so erzeugt man immer ein Nullsystem N_{2n-1}, wenn man jedem der $2n+1$ Räume R_{2n-2} durch $2n-1$ aufeinanderfolgende Eckpunkte von E denjenigen Eckpunkt von E zuordnet, welcher der Kante durch die beiden nicht in R_{2n-2} enthaltenen Eckpunkte gegenüber liegt.

Es leuchtet sofort ein, dafs man in der im Satze angedeuteten Weise zwischen den Punkten P von $R_{2n-1=n'}$ und den Räumen $R_{2n-2=n'-1}$ von $R'_{2n-1=n'}$ eine konjektive reciproke Verwandtschaft erzeugt; denn man ordnet wirklich $2n+1=n'+2$ Punkten P, von welchen nicht $2n=n'+1$ in einem $R_{2n-2=n'-1}$ liegen, ebenso viele Räume $R_{2n-2=n'-1}$ zu, von welchen nicht $2n=n'+1$ durch einen Punkt gehen. Also wird ein geometrischer Beweis des Satzes

Digitized by Google

erbracht sein, sobald gezeigt ist, dafs der Ort zweiter Ordnung der in den entsprechenden Räumen R_{2n-2} liegenden Punkte P unbestimmt wird. Zu diesem Zwecke kann man einen von Reye für $n=2$ veröffentlichten Beweis auf ein beliebiges n ausdehnen (vergleiche einen Aufsatz des Verfassers im *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, Teil XI, 1902). Allein wir wünschen, uns hier von den einfachen dabei zur Verwendung kommenden Eigenschaften der quadratischen gebogenen Räume fern zu halten und ziehen es also vor, uns auf einen einfachen analytischen Beweis zu beschränken; dabei betrachten wir zunächst den speziellen Fall $n=3$ eines N_5 im R_5.

Liegt im R_5 ein willkürliches einfaches Siebeneck gegeben vor, so kann man die Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$ als Eckpunkte des Koordinatensimplex, den Eckpunkt P_7 als Einheitspunkt annehmen. Es giebt dann die Tabelle

(1, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1, −1, 0)
(0, 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 1, −1)
(0, 0, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 1, 0, 0)	(−1, 0, 0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0, 1, 0)	(1, −1, 0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0, 0, 1)	(0, 1, −1, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 1, −1, 0, 0)

links die Koordinatensextupel $(t_1, t_2, \ldots, t_7)$ der sieben Eckpunkte, rechts die Koordinatensextupel $(\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_7)$ der sieben ihnen zugeordneten Räume R_4 an. Und nun ergiebt die Substitution dieser Werte in die Formeln

$$\sigma\tau'_i = c_{1,i}t_1 + c_{2,i} + \ldots + c_{6,i}t_6$$

das einfache Resultat, dafs von der Determinante der $c_{i,k}$ nur die Elemente $c_{14}, c_{15}, c_{25}, c_{26}, c_{36}, c_{41}, c_{51}, c_{52}, c_{62}, c_{63}$ nicht verschwinden und zwischen diesen die neun Beziehungen

$$\begin{array}{lll} c_{41}+c_{51}=0, & c_{62}+c_{63}=0, & c_{15}+c_{25}=0, \\ c_{51}+c_{52}=0, & c_{63}+c_{14}=0, & c_{25}+c_{26}=0, \\ c_{52}+c_{62}=0, & c_{14}+c_{15}=0, & c_{26}+c_{36}=0 \end{array}$$

bestehen; hieraus geht hervor, dafs diese Determinante mit jener der Raumkoordinaten τ'_i der sechs den Punkten

Digitized by Google

$P_1, P_2, \ldots, P_6$ entsprechenden Räume R_4 identisch ist. So findet man

$$\frac{\tau_1'}{t_5 - t_4} = \frac{\tau_2'}{t_6 - t_5} = \frac{\tau_3'}{-t_6} = \frac{\tau_4'}{t_1} = \frac{\tau_5'}{t_2 - t_1} = \frac{\tau_6'}{t_3 - t_2},$$

und diese Formeln befriedigen wirklich die Bedingungsgleichung $\sum_1^{2n} t_i \tau_i' = 0$, was wegen der schief symmetrischen Determinante nun auch wohl nicht anders sein konnte.

Im allgemeinen Falle eines beliebigen n findet man in der nämlichen Weise das ganz analoge Resultat

$$\frac{\tau_1'}{t_{n+2} - t_{n+1}} = \ldots = \frac{\tau_{n-1}'}{t_{2n} - t_{2n-1}} = \frac{\tau_n'}{-t_{2n}} = \frac{\tau_{n+1}'}{t_1}$$
$$= \frac{\tau_{n+2}'}{t_2 - t_1} = \ldots = \frac{\tau_{2n}'}{t_n - t_{n-1}},$$

wofür auch $\sum_1^{2n} t_i \tau_i' = 0$ ist.

119. **Durchmesserräume und Achse des Nullsystems.** Alle Geraden, Ebenen, Räume, u. s. w., deren entsprechende Elemente unendlich fern liegen, heifsen *Durchmesser, Durchmesserebenen, Durchmesserräume,* u. s. w. des Nullsystems. Sie gehen sämtlich durch den Nullpunkt U des uneigentlichen Raumes U_{2n-2} des Operationsraumes R_{2n-1}; deshalb sind alle Durchmesser einander parallel. Und man beweist leicht, dafs umgekehrt jeder diesen Punkt U enthaltende Raum R_m ein Durchmesserraum ist. Sind nämlich (R_m, R_{2n-m-1}), $(R_{m'}, R_{2n-m'-1})$ zwei Paare einander entsprechender Räume und geht R_m durch $R_{m'}$, so liegt, dem Charakter der reciproken Verwandtschaft zufolge, R_{2n-m-1} im $R_{2n-m'-1}$. Also mufs jedem Raume R_m durch den Nullpunkt U von U_{2n-2} ein im U_{2n-2} liegender Raum U_{2n-m-1} entsprechen; d. h. jeder Raum R_m durch U mufs ein Durchmesserraum sein.

Die Nullpunkte paralleler Räume R_{2n-2} liegen in einem Durchmesser, nämlich in der Gerade, welche dem diesen Räumen R_{2n-2} gemeinschaftlichen uneigentlichen Raume U_{2n-3} entspricht. Derjenige Durchmesser, welcher die Nullpunkte aller zu ihm senkrechten Räume R_{2n-2} enthält, wird die *Achse* des Nullsystems genannt. Diese Achse ist zu allen sie schneidenden Leitelementen normal.

Digitized by Google

120. **Einfachste analytische Darstellung des Nullsystems.** Wir beweisen nun, dafs irgend ein Nullsystem N_{2n-1} im R_{2n-1} durch die Gleichungen

$$\sigma\tau_{2k-1} = a_k t_{2k}, \quad \sigma\tau_{2k} = -a_k t_{2k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad 87)$$

dargestellt werden kann, und fangen dazu mit dem bekannten Falle $n = 2$ unseres dreidimensionalen Raumes an.

Ist das dem Koordinatensystem zu Grunde gelegte Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$ so gewählt worden, dafs die Gegenkanten $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ einander entsprechen, so ist dem Punkte $(k, 1, 0, 0)$ von $P_1 P_2$ wegen der Beziehung $\sum_1^4 t_i \tau_i = 0$ die Ebene $(1, -k, 0, 0)$ durch $P_3 P_4$ zugeordnet. Also werden die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sigma\tau_1 &= \quad\quad c_{12} t_2 + c_{13} t_3 + c_{14} t_4 \\ \sigma\tau_2 &= -c_{12} t_1 \quad\quad + c_{23} t_3 + c_{24} t_4 \\ \sigma\tau_3 &= -c_{13} t_1 - c_{23} t_2 \quad\quad + c_{34} t_4 \\ \sigma\tau_4 &= -c_{14} t_1 - c_{24} t_2 - c_{34} t_3 \end{aligned}\right] \qquad 88)$$

des allgemeinen Falles übergeführt in

$$\left.\begin{aligned} \sigma\tau_1 &= \quad c_{12} t_2 \\ \sigma\tau_2 &= -c_{12} t_1 \end{aligned}\right], \quad \left.\begin{aligned} \sigma\tau_3 &= \quad c_{34} t_4 \\ \sigma\tau_4 &= -c_{34} t_3 \end{aligned}\right].$$

Ist $P_3 P_4$ die Achse des Nullsystems, $P_1 P_2$ also die sie senkrecht kreuzende uneigentliche Gerade, so geben die neuen Gleichungen in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten:

$$\frac{\xi_1}{a x_2} = \frac{\xi_2}{-a x_1} = \frac{\xi_3}{1} = \frac{1}{-x_3}. \qquad 89)$$

Ist nun weiter im R_5 ein Nullsystem N_5 gegeben und entspricht jeder der drei zu einander windschiefen Geraden g, g', g'' der durch die beiden andern bestimmte Raum R_3, so hat man nur als Koordinatensimplex das $S(6)$ zu wählen, welches irgend drei Punktepaare dieser Geraden, (P_1, P_2) von g, (P_3, P_4) von g', (P_5, P_6) von g'', zu Eckpunkten hat um auf die analogen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma\tau_1 &= \quad c_{12} t_2 \\ \sigma\tau_2 &= -c_{12} t_1 \end{aligned}\right], \quad \left.\begin{aligned} \sigma\tau_3 &= \quad c_{34} t_4 \\ \sigma\tau_4 &= -c_{34} t_3 \end{aligned}\right], \quad \left.\begin{aligned} \sigma\tau_5 &= \quad c_{56} t_6 \\ \sigma\tau_6 &= -c_{56} t_5 \end{aligned}\right]$$

Digitized by Google

zu stofsen; denn die Punkte

$$(k, 1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 0, k, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 0, k, 1)$$

der Kanten $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $P_5 P_6$ entsprechen der Reihe nach den vierdimensionalen Räumen

$$(1, -k, 0, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, -k, 0, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1, -k)$$

durch die dreidimensionalen Räume $P_3 P_4 P_5 P_6$, $P_5 P_6 P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Wir nennen die drei Geraden g, g', g'' ein *Kantentripel* des Nullsystems N_5 und bezeichnen dasselbe mit $K(3)$.

Man beweist leicht, dafs zwei Geraden g, g', welche eine gegebene Gerade g'' zu einem Kantentripel $K(3)$ von N_5 ergänzen, einander zugeordnet sind im Nullsysteme N_3, welches den Schnitt des gegebenen Nullsystems N_5 mit dem der Gerade g'' in ihm zugeordneten Raume R_3'' bildet. Schneidet man nämlich das Nullsystem N_5 in der bei Polarsystemen (116$_6$) angegebenen Weise durch diesen R_3'', indem man den Punkten, Geraden und Ebenen dieses Raumes die Schnitte der ihnen im N_5 entsprechenden Gebilde mit diesem R_3'' zuordnet, so erzeugt man offenbar in diesem R_3'' das in Rede stehende Nullsystem N_3, in welchem g und g' einander entsprechen. Ist nun g'' die Achse von N_5 und sind g und g' im g'' zugeordneten uneigentlichen Raume U_3'' zwei einander nicht nur im Schnittnullsysteme N_3 sondern auch senkrecht zugeordnete Geraden, — und wir beweisen sofort, dafs es immer ein Paar reeller Geraden von dieser Beschaffenheit giebt —, so führt irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit g und g' als uneigentliche Geraden der Ebenen $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$ und mit g'' als Achse OX_5 zu den Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{a x_2} = \frac{\xi_2}{-a x_1} = \frac{\xi_3}{b x_4} = \frac{\xi_4}{-b x_3} = \frac{\xi_5}{1} = \frac{1}{-x_5}.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen übrig, dafs es in irgend einem N_3 im U_3'' zwei einander entsprechende Strahlen giebt, die aufserdem einander senkrecht zugeordnet sind. Dazu bemerken wir:

1º dafs die einander im U_3' senkrecht zugeordneten Geraden (116$_{11}$) einander zugeordnet sind in einem besonderen Polarsysteme $\overline{P_3}$,

Digitized by Google

2º dafs man im U_3'' eine kollineare Verwandtschaft erzeugt, wenn man (114₆) je zwei einer nämlichen Ebene ε in N_3 und $\overline{P_3}$ entsprechende Punkte einander zuordnet,

3º dafs die vier Koincidenzpunkte dieser kollinearen Verwandtschaft sämtlich imaginär sind, weil ein reeller Koincidenzpunkt dem Charakter von N_3 nach in der ihm entsprechenden Ebene liegen mufs und dies dem speziellen Charakter von $\overline{P_3}$ zufolge nicht möglich ist,

4º dafs das Tetraeder dieser vier Koincidenzpunkte zu einem aber auch nur einem Paare von Geraden g, g' der verlangten Beschaffenheit führt, weil es in den Verbindungsgeraden der Paare konjugiert imaginärer Eckpunkte nur ein Paar reeller Gegenkanten besitzt,

5º dafs die Paare von Koincidenzpunkten auf g (und g') dem besonderen Charakter von $\overline{P_3}$ zufolge die Kreispunktenpaare der durch g (und g') gehenden Ebenen sind.

Im allgemeinen Falle eines N_{2n-1} im R_{2n-1} bestimmen wir ein Koordinatensimplex $S(2n)$ mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \ldots P_{2n}$, welchem die Eigenschaft zukommt, dafs die n alle Eckpunkte aufnehmenden Kanten P_1P_2, $P_3P_4, \ldots P_{2n-1}P_{2n}$ ein System $K(n)$ von n Geraden bilden von der Beschaffenheit, dafs jeder dieser Geraden im N_{2n-1} der durch die $n-1$ übrigen bestimmte Raum R_{2n-3} entspricht. In Bezug auf irgend ein mit einem solchen Simplex in Verbindung stehendes Koordinatensystem wird das Nullsystem dann durch die Gleichungen 87) dargestellt.

Ist nun weiter U_{2n-3} der uneigentliche Raum, welcher der Achse von N_{2n-1} entspricht, so beweisen wir, dafs es in diesem U_{2n-3} ein System von $n-1$ reellen, einander zu je zwei senkrecht zugeordneten Geraden giebt, welche mit der Achse ein System $K(n)$ von n Geraden der oben beschriebenen Beschaffenheit bilden. Dazu mufs dann wieder hervorgehoben werden, dafs der Schnitt des Nullsystems mit dem der Achse zugeordneten Raume U_{2n-3} ein Nullsystem N_{2n-3} ist, dafs die in diesem U_{2n-3} einander senkrecht zugeordneten Elemente ein spezielles Polarsystem $\overline{P}_{2n-3}$ bilden, dafs die kollineare Verwandtschaft zwischen den einem nämlichen U_{2n-4} vom U_{2n-3} in N_{2n-3} und in

Digitized by Google

$\bar{P}_{2n-3}$ zugeordneten Punkten $2n-2$ imaginäre Koincidenzpunkte besitzt und diese Punkte also immer ein aber auch nur ein System von $n-1$ sie alle enthaltenden reellen Geraden zulassen, die Verbindungsgeraden der Paare konjugiert imaginärer Punkte, von welchen Geraden diese Paare dann wieder die Kreispunktenpaare sind. Nimmt man nun die Achse von N_{2n-1} als Achse OX_{2n-1} eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, für welches überdies die $n-1$ oben gefundenen uneigentlichen Geraden die Stellungen der Ebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_3 X_4)$, . . , $(OX_{2n-3}\ X_{2n-2})$ bestimmen, so erhält man für N_{2n-1} das Gleichungssystem

$$\frac{\xi_1}{ax_2} = \frac{\xi_2}{-ax_1} = \frac{\xi_3}{bx_4} = \frac{\xi_4}{-bx_3} = \ldots = \frac{\xi_{2n-3}}{kx_{2n-2}} = \frac{\xi_{2n-2}}{-kx_{2n-3}} = \frac{\xi_{2n-1}}{1} = \frac{1}{-x_{2n-1}}. \quad 90)$$

Hiermit ist die einfachste analytische Darstellung des N_{2n-1} aufgedeckt.

121. **Beweglichkeit des Nullsystems.** Nennt man die $n-1$ oben gefundenen zu je zwei einander senkrecht zugeordneten uneigentlichen Geraden die *uneigentlichen Achsen* des Nullsystems, so beweist man mit Hilfe der Gleichungen 90) unmittelbar folgenden allgemeinen Satz:

Als Ganzes ändert das Nullsystem N_{2n-1} sich nicht bei irgend einer Schraubung um seine n Achsen.

Diese Schraubung ist die Resultierende der $n-1$ Drehungen und der einzigen Verschiebung, dargestellt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_{2k-1} &= y_{2k-1}\cos\varphi_k - y_{2k}\sin\varphi_k \\ x_{2k} &= y_{2k-1}\sin\varphi_k + y_{2k}\cos\varphi_k \end{aligned}\right\}, \ (k=1,\ 2,\ \ldots\ n-1),$$

$$x_{2n-1} = y_{2n-1} + p,$$

welche, in Verbindung mit der Bedingung $\sum_1^{2n-1} x\xi + 1 = 0$, der Transformation

$$\left.\begin{aligned} \eta_{2k-1} &= \frac{\xi_{2k-1}\cos\varphi_k - \xi_{2k}\sin\varphi_k}{1+p\xi_{2n-1}} \\ \eta_{2k} &= \frac{\xi_{2k-1}\sin\varphi_k + \xi_{2k}\cos\varphi_k}{1+p\xi_{2n-1}} \end{aligned}\right\}, \ (k=1,\ 2,\ \ldots\ n-1),$$

$$\eta_{2n-1} = \frac{\xi_{2n-1}}{1+p\xi_{2n-1}}$$

Digitized by Google

entsprechen. Und nun erhält man nach Umkehrung dieses letzteren Systems und Substitution der Werte für x_i und ξ_i in 90) mittels einer einfachen Umbildung das Gleichungssystem, in welches das System 90) übergeht, wenn man x_i und ξ_i durch y_i und η_i ersetzt; also ist der obige Satz bewiesen.

Aufgabe 266. Kann auch geometrisch bewiesen werden, dafs das Nullsystem sich nicht ändert bei einer Verschiebung in der Richtung der Achse?

[Alle in einem Durchmesserraume R_{2n-2} liegenden Leitstrahlen sind einander parallel; denn sie enthalten den unendlich fernen Nullpunkt dieses Raumes. Also bleibt das System der Leitstrahlen als Ganzes ungeändert, wenn man das Nullsystem in der Richtung der Achse verschiebt, u. s. w.]

122. **Die Nullsysteme in der Mechanik.** Die Beweglichkeit des Nullsystems N_{2n-1} im R_{2n-1} deckt sich vollkommen mit der allgemeinsten Bewegung im R_{2n-1}. Es steht auch mit einer unendlich kleinen Bewegung eines unveränderlichen Systems im R_{2n-1} in Verbindung mittels folgenden allgemeinen Satzes:

Erleidet ein starres System S_{2n-1} in seinem Raume R_{2n-1} eine unendlich kleine Bewegung allgemeinster Art, so sind die Räume R_{2n-2}, welche durch seine Punkte P normal zu den Bewegungsrichtungen dieser Punkte gelegt werden, diesen Punkten zugeordnet in einem gewissen Nullsysteme N_{2n-1}. Und umgekehrt kann jedes im R_{2n-1} gegeben vorliegende Nullsystem N_{2n-1} auf diese Weise erzeugt werden.

Der analytische Beweis dieser mehrdimensionalen Ausdehnung eines bekannten Satzes von Chasles ist äufserst einfach. Es ist nämlich das im Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})$ auf den entsprechenden Raum $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n-1})$ errichtete Lot, entsprechend den Gleichungen 90),

$$\frac{X_1 - x_1}{a x_2} = \frac{X_2 - x_2}{-a x_1} = \ldots = \frac{X_{2n-3} - x_{2n-3}}{k x_{2n-2}}$$

$$= \frac{X_{2n-2} - x_{2n-2}}{-k x_{2n-3}} = \frac{X_{2n-1} - x_{2n-1}}{1},$$

Digitized by Google

woraus, wenn h der gemeinsame Wert dieser Brüche ist, das System

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 + ahx_2 \\ X_2 &= x_2 - ahx_1 \end{aligned}\right], \quad \left.\begin{aligned} X_3 &= x_3 + bhx_4 \\ X_4 &= x_4 - bhx_3 \end{aligned}\right], \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} X_{2n-3} &= x_{2n-3} + khx_{2n-2} \\ X_{2n-2} &= x_{2n-2} - khx_{2n-3} \end{aligned}\right], \quad X_{2n-1} = x_{2n-1} + h$$

hervorgeht. Und für unendlich kleines h zeigen diese Gleichungen, dafs die willkürliche unendlich kleine Bewegung, welche aus den Drehungen $-ah, -bh, \ldots, -kh$ in den Ebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_3 X_4)$, .., $O(X_{2n-3} X_{2n-2})$ um O und der Verschiebung h in der Richtung von OX_{2n-1} resultiert, das Punktsystem $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})$ in das System der aufolgenden Punkte $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1})$ dieser Lote überführt.

Aufgabe 267. Im R_{2n-1} liegen zwei positiv kongruente Systeme C_{2n-1}, C'_{2n-1}, von welchen P, P' irgend zwei einander entsprechende Punkte sind. Jedem Punkte P von C_{2n-1} ordnet man den Raum R_{2n-2} zu, welcher den Abstand PP' senkrecht halbiert. Mit Hilfe der Aufgabe 254 zu zeigen, dafs zwischen den einander zugeordneten Elementen P, R_{2n-2} eine reciproke Verwandtschaft besteht.

Ohne Beweis erwähnen wir weiter noch folgenden Satz:

„Ein im R_{2n-1} gegebenes Kräftesystem allgemeinster Art läfst sich auf $\infty^{2n(2n-1)}$ wirklich verschiedene Arten auf n nicht in einem nämlichen R_{2n-2} liegende Einzelkräfte zurückführen. Die Systeme der n diese Kräfte tragenden Geraden $K(n)$ gehören im oben angedeuteten Sinne einem nämlichen Nullsysteme N_{2n-1} an. Umgekehrt kann jedes dieser dem Nullsysteme N_{2n-1} angehörenden Systeme $K(n)$ von n Geraden n Kräfte tragen, welche das gegebene Kräftesystem zu ersetzen imstande sind. Insbesondere steht das System $K(n)$ der n Achsen des Nullsystems in Verbindung mit der Ersetzung des Kräftesystems durch eine Einzelkraft und $n-1$ Kräftepaare."

Aufgabe 268. Wie wird die Zahl $\infty^{2n(2n-1)}$ gefunden?

[Man vergleiche einen kleinen Aufsatz des Verfassers, *Archives Néerlandaises*, zweite Reihe, T. VI, S. 193—196.]

Digitized by Google

§ 8. Geometrie der Anzahl.

123. **Die Konstantenzahlen von linearen Räumen.** Im allgemeinen ist, wie wir gesehen haben, der Punkt bestimmt durch seine n Projektionen $P_1, P_2, \ldots P_n$ auf die Achsen, d. h. durch n willkürliche Strecken OP_i, seine Koordinaten. Ebenso ist die Gerade gegeben, wenn ihre Projektionen $g_{12}, g_{23}, \ldots g_{n-1,n}$ und also die durch diese Projektionen $g_{i,i+1}$ von den Achsen OX_i, OX_{i+1} abgeschnittenen Segmente, d. h. $2(n-1)$ Strecken bekannt sind. So fortfahrend findet man, dafs die Ebene durch $n-2$ Streckentripel, und allgemein ein R_d im R_n durch $n-d$ Systeme von $d+1$ Strecken bestimmt ist. Da jede dieser $(n-d)(d+1)$ von einander unabhängigen Gröfsen, welche R_d bestimmen, alle möglichen positiven und negativen Werte annehmen kann, die Aenderung von irgend einer dieser Gröfsen also schon unendlich viele Räume R_d hervorbringt, so sagt man, dafs die Anzahl der im R_n enthaltenen Räume R_d unendlich grofs zur $(n-d)(d+1)^{\text{ten}}$ Potenz oder, in abgekürzter Redeweise, $(n-d)(d+1)$-fach unendlich ist. Die Zahl $(n-d)(d+1)$ heifst dann die „Mächtigkeit", oder, wie wir mit Herrn Schubert sagen wollen, die „Konstantenzahl" von R_d im R_n. Unwesentlich ist dabei der hier auftretende besondere Umstand, dafs irgend ein willkürlich gewähltes System von $(n-d)(d+1)$ Strecken einen *einzigen* Raum R_d bestimmt. Und diese Zahl von bestimmenden Gröfsen wird auch gefunden mit Hilfe der $n-d$ Gleichungen 29), deren jede $d+1$ Parameter $a_i, b_i, \ldots s_i$ enthält.

Die erhaltene Zahl $(n-d)(d+1)$ ändert sich nicht, wenn man d durch $n-d-1$ ersetzt, d. h. der Raum R_n enthält sowohl $\infty^{(n-d)(d+1)}$ Räume R_{n-d-1} wie Räume R_d. Die Reihe

$$n.1,\ (n-1)2,\ (n-2)3, \ldots 3(n-2),\ 2(n-1),\ 1.n$$

ändert sich also nicht, wenn sie von hinten nach vorn gelesen wird. Es wird wohl fast unnötig sein, zu bemerken, dafs wir hier einer Aussage des Gesetzes der Dualität gegenüber stehen. Wirklich findet man, wenn man die Reihenfolge Punkt, Gerade, Ebene, ... durch Raum R_{n-1}, Raum R_{n-2}, Raum R_{n-3}, ... ersetzt, mittels der Gleichungen 47) un-

Digitized by Google

mittelbar das nämliche Resultat, für welches man auch die Aufgabe 208 vergleichen kann.

Aufgabe 269. Kann man aus der Thatsache allein, dafs die Konstantenzahlen der Räume R_d und R_{n-d-1} einander gleich sind, schon schliefsen, dafs R_n ebenso viele Räume R_d wie Räume R_{n-d-1} enthält?

[Nein, denn mit dieser Thatsache liefse sich auch wohl vereinbaren, dafs die Zahl der Räume R_{n-d-1} z. B. doppelt so grofs wäre wie die Zahl der Räume R_d.]

Aufgabe 270. Zeige, dafs die Formel der Aufgabe 215 zum nämlichen Resultate $(n-d)(d+1)$ führt.

[Ist m unendlich grofs, so findet man

$$A_{n,d} = \frac{m^{n+1}}{m^{d+1}} \cdot \frac{m^n}{m^d} \cdot \frac{m^{n-1}}{m^{d-1}} \cdots \frac{m^{n-d+1}}{m}$$

d. h.

$$A_{n,d} = (m^{n-d})^{d+1} = m^{(n-d)(d+1)}.]$$

Zum Zwecke der Anwendungen suchen wir noch zwei andere Konstantenzahlen. Zuerst bestimmen wir die Konstantenzahl des einen gegebenen Raum $R_{d'}$ enthaltenden Raumes R_d folgendermafsen. Ist $R_{n-d'-1}$ irgend ein zu $R_{d'}$ windschiefer Raum, so wird dieser $R_{n-d'-1}$ von jedem durch $R_{d'}$ gehenden Raume R_d in einem Raume $R_{d-d'-1}$ geschnitten; da nun umgekehrt jedem in $R_{n-d'-1}$ angenommenen $R_{d-d'-1}$ ein durch $R_{d'}$ gehender Raum R_d entspricht, so ist die gesuchte Zahl zu gleicher Zeit die Konstantenzahl von $R_{d-d'-1}$ im $R_{n-d'-1}$, d. h. $[(n-d'-1)-(d-d'-1)](d-d')$ oder $(n-d)(d-d')$. Und von dieser Zahl aus steigt man leicht empor zur Konstantenzahl des Raumes R_{d_1}, welcher einen gegebenen Raum R_{d_2} in irgend einem Raume R_{d_3} schneidet. Man erhält nämlich alle diese Räume R_{d_1}, indem man durch jeden im R_{d_2} enthaltenen R_{d_3} alle möglichen Räume R_{d_1} legt; d. h. die gesuchte Konstantenzahl ist die Summe der Konstantenzahl $(d_2-d_3)(d_3+1)$ von R_{d_3} in R_{d_2} und der Konstantenzahl $(n-d_1)(d_1-d_3)$ des durch einen gegebenen R_{d_3} gehenden Raumes R_{d_1}; weshalb man findet:

$$(d_2-d_3)(d_3+1)+(n-d_1)(d_1-d_3).$$

Digitized by Google

124. **Einfache Anwendungen.** Schon früher haben wir Anlafs gefunden, bei einigen sehr einfachen Gebilden nach ihrem Unendlichkeitsgrade zu fragen; da hat sich also — wir verweisen auf die Aufgaben 41, 42, 61, 167, 268 — der Gedanke der Konstantenzahl schon aufgedrängt. Wir fügen hier nun noch einige einfache Beispiele hinzu.

Aufgabe 271. Welche ist die Konstantenzahl der zu einander kongruenten Systeme im R_n?

[Offenbar ist die Lage des Systems bekannt, sobald n seiner Punkte festgelegt sind. Nun wird der erste Punkt A_1 durch n Koordinaten bestimmt, der zweite A_2 wegen des gegebenen Abstandes $A_1 A_2$ durch $n-1$, der dritte A_3 wegen der gegebenen Abstände $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ durch $n-2$, u. s. w. Deshalb ist die gesuchte Zahl $\frac{1}{2} n(n+1)$.]

Aufgabe 272. Beweise, dafs die Konstantenzahl des rechtwinkligen Koordinatensystems im R_n auch $\frac{1}{2} n(n+1)$ ist.

[Die Frage ist mit der vorhergehenden identisch.]

Aufgabe 273. Suche die Konstantenzahl des Polsimplex (116$_n$) in einem im R_n gegebenen Polarsysteme.

[Von den $n+1$ Eckpunkten dieses Gebildes ist der erste ganz willkürlich, der zweite willkürlich in einem R_{n-1}, der dritte willkürlich in einem R_{n-2}, u. s. w. Es ist die verlangte Zahl also wieder $\frac{1}{2} n(n+1)$.

Auch die Voraussetzung, dafs m in der Formel der Aufgabe 259 unendlich sei, liefert dieses Resultat.]

Aufgabe 274. Bestimme die Konstantenzahl der Leiträume R_d in einem Nullsysteme N_{2n-1} im R_{2n-1}.

[Mit Hilfe der Betrachtungen der Aufgabe 265 findet man $\frac{1}{2}(k+1)(4n-3k+2)$.]

Wir schliefsen diese Reihe von einfachen Beispielen mit der Anwendung der Konstantenzahlen auf die Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes (67) ab. Setzt man

Digitized by Google

voraus, dafs die Bildebene ε durch den Scheitel O des n-Beins gelegt sei und die Projektion O' von O deshalb mit O zusammenfalle, so können die uneigentlichen Punkte der Schenkel des n-Beins, die gemeinschaftliche Länge $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ der Schenkel und der allen projizierenden Räumen R_{n-2} gemeinschaftliche Raum U_{n-3} willkürlich gewählt werden. Bedenkt man nun, dafs der uneigentliche Punkt von OA_2 auf einen U_{n-2} beschränkt wird, sobald jener von OA_1 im U_{n-1} willkürlich gewählt ist, so findet man, dafs:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+1+2(n-2) = \frac{1}{2}(n^2+3n-6)$$

Gröfsen zur Verfügung stehen und andererseits die Projektionen OA_1', OA_2', $\ldots$ OA_n' durch die Koordinatenpaare der n Punkte A_i', d. h. durch $2n$ Gröfsen bestimmt werden. Also wird die Möglichkeit der Lösung des Problems von der Ungleichung

$$n^2+3n-6 \geqq 4n,$$

oder

$$n^2-n-6 \geqq 0$$

beherrscht. Nun ist

$$n^2-n-6 = (n+2)(n-3).$$

Also ist für $n=3$ die Zahl der Bedingungen der Zahl der zur Verfügung stehenden Gröfsen gleich, jedoch für $n>3$ die erste Zahl immer kleiner als die zweite; d. h. für $n=3$ mufs es eine endliche, für $n>3$ mufs es eine unendliche Zahl von Lösungen geben. Wirklich ist für $n=3$ die Zahl der Lösungen zwei, u. s. w.

Natürlich ist die angegebene Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes vom theoretischen Standpunkte aus nicht die einzig mögliche. So kann man einen R_m als Projektionsraum annehmen und untersuchen, ob n willkürlich gewählte von einem nämlichen Punkte O dieses Raumes R_m ausgehende Strecken die Projektion eines n-Beins auf diesen Raum R_m bilden können, wobei dann die projizierenden Räume zu einander parallele Räume R_{n-m} sind. Man erhält dann die Ungleichung:

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1+m(n-m) \geqq mn,$$

Digitized by Google

oder

$$n^2 - n + 2 \geqq 2m^2$$

und findet für die Werte von n von 4 bis 25 folgende Maximalwerte von m:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
m	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13	14	15	15	16	17

Aufgabe 275. Zu welcher Grenze nähert sich $\frac{m}{n}$ für $n = \infty$?

125. **Die imaginären linearen Räume.** Früher haben wir uns auf imaginäre Punkte beschränkt und bewiesen, dafs die Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Punkte immer reell ist[111]. Wir dehnen unsere Betrachtungen jetzt auf imaginäre Geraden, Ebenen, Räume u. s. w. aus und bestimmen dann in der folgenden Nummer die Konstantenzahlen dieser Gebilde.

Wir leiten diese Betrachtungen mit folgendem Satze ein:

Sind einige oder alle Eckpunkte des Simplex $S(d+1)$ imaginär und deutet $S'(d+1)$ das Simplex an, welches man erhält, wenn man die imaginären Eckpunkte von $S(d+1)$ durch die zu ihnen konjugiert imaginären Punkte ersetzt, so bestimmen $S(d+1)$ und $S'(d+1)$ zwei imaginäre Räume R_d, R'_d von der Beschaffenheit, dafs der eine der Ort ist der Punkte konjugiert imaginär zu den Punkten des andern. Deshalb nennen wir diese Räume R_d, R'_d, welche nun auch ihre reellen Punkte mit einander gemein haben, konjugiert imaginär.

Der analytische Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus den Gleichungen 29) des Raumes R_d. Bestimmt man nämlich durch Einsetzung der Koordinaten der Eckpunkte des Simplex $S(d+1)$ die Werte der Koeffizienten $a_i, b_i, \ldots r_i, s_i$, so erhält man imaginäre Gröfsen, welche nach den einfachsten Gesetzen der Algebra in die konjugiert imaginären Gröfsen übergehen, wenn man die eingesetzten Koordinaten durch die konjugiert imaginären Werte, d. h. wenn man die Eckpunkte von $S(d+1)$ durch diejenigen von $S'(d+1)$ ersetzt. Und die nämliche Bemerkung zeigt dann weiter, dafs sich jedem Punkte $(x_k + y_k\sqrt{-1})$ von R_d ein Punkt $(x_k - y_k\sqrt{-1})$ von R'_d zur Seite stellt.

Digitized by Google

Aufgabe 276. Kann der durch ein Simplex mit imaginären Eckpunkten bestimmte Raum R_d nicht reell sein?

[Allerdings. Dies ist sogar *immer* der Fall, wenn die imaginären Eckpunkte von $S(d+1)$ aus Paaren konjugiert imaginärer Punkte bestehen.]

Man findet nun weiter:

Zwei konjugiert imaginäre Räume R_d, R'_d sind entweder zu einander windschief oder sie haben einen linearen Raum $R_{d'}$ mit einander gemein, wo $d' = 0, 1, 2, \ldots$ sein kann.

Der Beweis dieses Satzes entfliefst der Bemerkung, dafs zwei linearen Räumen, welche die reellen Punkte P_1, P_2 gemein haben, die reelle Gerade $P_1 P_2$ gemeinsam ist; dabei kann man weiter die Entwickelungen der Nr. 8 vergleichen.

Mittels des letzten Satzes sind wir jetzt sogleich imstande die verschiedenen Arten von imaginären Räumen R_d im R_n anzugeben. Man findet:

Rücksichtlich der Realität giebt es im R_n entweder $d+2$ oder $n-d+1$ verschiedene Arten von Räumen R_d, je nachdem n gröfser als $2d$ oder kleiner als $2d+2$ ist.

Dies leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dafs zwei konjugiert imaginäre Räume R_d, R'_d nach der Formel 6) nicht windschief zu einander sein können, wenn n kleiner als $2d+1$ ist. Und für $n = 2d+1$ sagen beide Teile des Satzes offenbar das nämliche aus.

Aufgabe 277. Beweise, dafs der Raum R_n hinsichtlich der Realität eine Anzahl von entweder $\frac{1}{4}n(n+6)$ oder $\frac{1}{4}(n^2+6n+1)$ verschiedenen Arten von linearen Elementen enthält, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

[Man findet zwei Arten von Punkten und von Räumen R_{n-1}, drei Arten von Geraden und von Räumen R_{n-2}, vier Arten von Ebenen und von Räumen R_{n-3}, u. s. w.]

126. **Die Konstantenzahlen von imaginären linearen Räumen.** Wir deuten, indem wir uns wieder von Punktwerten bedienen, mit dem Symbole R_{w_1, w_2} irgend einen imaginären Raum R_{w_1} an, dessen reelle Punkte einen Raum R_{w_2} erfüllen. Es ist dann $R_{w_1, 0}$ ein „rein imaginärer" Raum

Digitized by Google

mit lauter imaginären Elementen, R_{w_1, w_2} ein „komplexer“ Raum und R_{w_1, w_1} ein „reeller“ Raum.

Ist nun $c^{(w)}_{w_1, w_2}$ die Konstantenzahl von R_{w_1, w_2} im reellen R_w, so gilt zunächst die Beziehung

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = c^{(w)}_{w_2, w_2} + c^{(w-w_2)}_{w_1 - w_2, 0}. \qquad 91)$$

Denn zur Bestimmung eines Raumes R_{w_1, w_2} kann man im R_w einen reellen Raum R_{w_2, w_2} willkürlich wählen um nachher diesen R_{w_2, w_2} mit irgend einem $R_{w_1 - w_2, 0}$ irgend eines zum R_{w_2, w_2} windschiefen Raumes $R_{w-w_2, w-w_2}$ durch einen R_{w_2, w_2} zu verbinden.

Weiter ist allgemein

$$c^{(w')}_{w_3, 0} = 2c^{(w')}_{w_3, w_3}. \qquad 92)$$

Denn bei den rein imaginären Räumen treten an die Stelle irgend eines der Koeffizienten der Gleichungen 29) zwei Koeffizienten auf.

Es geben also 91) und 92) zusammen

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = c^{(w)}_{w_2, w_2} + 2c^{(w-w_2)}_{w_1 - w_2, w_1 - w_2},$$

oder mit Hilfe des oben(123,) schon erhaltenen Resultates

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = w_2 (w - w_2) + 2 (w - w_1)(w_1 - w_2),$$

d. h.

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = (2w_1 - w_2)(w - w_1) + w_2 (w_1 - w_2). \qquad 93)$$

Also findet man im Raume von zehn Dimensionen, d. h. für $w = 11$, wenn abkürzend (w_1, w_2) für c_{w_1, w_2} geschrieben wird:

$(1,1) = (10,10) = 10$	$(3,1) = (8,6) = 42$	$(5,5) = (6,6) = 30$
$(1,0) = (10, 9) = 20$	$(3,0) = (8,5) = 48$	$(5,4) = (6,5) = 40$
$(2,2) = (9, 9) = 18$	$(4,4) = (7,7) = 28$	$(5,3) = (6,4) = 48$
$(2,1) = (9, 8) = 28$	$(4,3) = (7,6) = 38$	$(5,2) = (6,3) = 54$
$(2,0) = (9, 7) = 36$	$(4,2) = (7,5) = 46$	$(5,1) = (6,2) = 58$
$(3,3) = (8, 8) = 24$	$(4,1) = (7,4) = 52$	$(5,0) = (6,1) = 60$
$(3,2) = (8, 7) = 34$	$(4,0) = (7,3) = 56$	

Digitized by Google

Aufgabe 278. Bestätige mittels der Formel 93) das in obenstehender Tabelle zum Ausdruck kommende Gesetz

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = c^{(w)}_{w-w_1, w-2w_1+w_2}. \qquad 94)$$

Wir beweisen die Beziehung 94) mit Hilfe des Gesetzes der Dualität. In irgend einer Orthogonalitätsverwandtschaft im R_w entspricht einem R_{w_1, w_2}, welcher mit seinem konjugiert imaginären Raume in einem reellen $R_{2w_1-w_2}$ und also in einem Sterne von reellen Räumen R_{w-1} durch diesen $R_{2w_1-w_2}$ liegt, offenbar ein Raum R_{w-w_1}, dessen reelle Punkte den diesem $R_{2w_1-w_2}$ entsprechenden Raum $R_{w-(2w_1-w_2)}$ erfüllen, d. h. ein $R_{w-w_1, w-2w_1+w_2}$. Also müssen die Räume R_{w_1, w_2} und $R_{w-w_1, w-2w_1+w_2}$ die nämliche Konstantenzahl haben.

127. **Die Konstantenzahlen von Bedingungen.** Nennt man eine einem Gebilde auferlegte Bedingung *einfach*, wenn sie mittels einer einzigen Beziehung zwischen den dieses Gebilde bestimmenden Gröfsen ausgedrückt werden kann, so giebt die Konstantenzahl des Gebildes offenbar die Zahl der einfachen Bedingungen an, welchen das Gebilde unterworfen werden kann. So ist vier die Konstantenzahl der Gerade im R_3 und findet man deshalb eine endliche Zahl (zwei) von gemeinschaftlichen Transversalen zu vier Geraden im R_3, weil es im R_3 bekanntlich eine einfache Bedingung für eine Gerade ist eine gegebene Gerade zu schneiden. So ist sechs die Konstantenzahl der Gerade im R_4 und giebt es dort deshalb eine endliche Zahl (eine$^{(28_3)}$) von Geraden, welche drei gegebene Geraden schneiden, weil es im R_4 eine zweifache Bedingung ist, dafs eine Gerade einer gegebenen Gerade begegnen soll.

Obigen Beispielen kann entnommen werden, dafs es in Bezug auf die Verwendung von Konstantenzahlen wünschenswert ist, allgemein zu wissen, welche Anzahl von einfachen Bedingungen äquivalent ist der mehrfachen Bedingung, dafs im R_n ein zu bestimmender Raum R_{d_1} mit einem gegebenen Raume R_{d_2} irgend einen Raum R_{d_3} gemein haben soll. Da wir wissen, dafs die Konstantenzahl der überhaupt im R_n möglichen R_{d_1} den Wert $(n-d_1)(d_1+1)$ hat und wir für

Digitized by Google

die Konstantenzahl der durch die Bedingung irgend einen R_{d_3} vom R_{d_2} zu enthalten beschränkten Gruppe von R_{d_1} den Wert $(d_2 - d_3)\ (d_3 + 1) + (n - d_1)\ (d_1 - d_3)$ fanden, so hat letztere mehrfache Bedingung die Zahl der zur Verfügung stehenden Gröfsen um

$$(n - d_1)\ (d_1 + 1) - [(d_2 - d_3)\ (d_3 + 1) + (n - d_1)\ (d_1 - d_3)] = (n - d_1 - d_2 + d_3)\ (d_3 + 1)$$

verringert und sind dieser deshalb $(n - d_1 - d_2 + d_3)(d_3 + 1)$ einfache Bedingungen äquivalent. Wir drücken dies aus, indem wir sagen, dafs der Bedingung „R_{d_1} habe im R_n mit einem gegebenen R_{d_2} irgend einen R_{d_3} gemein" die Konstantenzahl $(n - d_1 - d_2 + d_3)\ (d_3 + 1)$ zukomme.

Aufgabe 279. Beweise, dafs $n - d_1 - d_2 + d_3$ nicht negativ sein kann.

Aufgabe 280. Beweise, dafs die zwei obenstehenden Beispiele (127$_1$) die einzig möglichen sind, wenn es gilt, eine Gerade durch die Bedingung zu bestimmen, auf einigen zu einander windschiefen Geraden zu ruhen.

[Im R_n sind $2(n-1)$ und $n-2$ die Konstantenzahlen der Gerade und der Bedingung, dafs eine Gerade eine gegebene Gerade schneide. Und nun ist $n-2$ nur für $n=3$ und für $n=4$ in $2n-2$ teilbar; denn weil $2n-2=2(n-2)+2$ ist, so erfordert dies, dafs $n-2$ in 2 teilbar sei.]

Aufgabe 281. Beweise, dafs es im Raume R_{2n} eine endliche Anzahl von Räumen R_{n-1} geben mufs, welche $n+1$ willkürlich angenommene Geraden schneiden (97$_5$).

[Die Konstantenzahl von R_{n-1} in R_{2n} ist $n(n+1)$; die Konstantenzahl der Bedingung, dafs R_{n-1} in R_{2n} eine Gerade schneide, ist n.]

Aufgabe 282. Beweise, dafs es im Raume R_{2n-1} eine endliche Anzahl von Räumen R_{n-1} geben mufs, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und n willkürlich angenommene Geraden schneiden (97$_4$).

[Die Konstantenzahl von R_{n-1} in R_{2n-1} ist n^2; die Konstantenzahlen der Bedingungen, dafs R_{n-1} in R_{2n-1} durch einen gegebenen Punkt gehe und eine gegebene Gerade schneide, sind n und $n-1$.]

Digitized by Google

128. **Das Korrespondenzprinzip von Chasles und das Prinzip der Erhaltung der Anzahl von Schubert.** Es ist uns natürlich ganz und gar unmöglich, hier eine, wenn auch noch so kurze Übersicht des Schubert'schen Musterwerkes „Kalkül der abzählenden Geometrie" einzuschalten, in welchem der Urheber dieser Lehrbüchersammlung die allgemeinen Gesetze der von Chasles, Zeuthen und ihm selbst geschaffenen neuen Wissenschaft kodifiziert hat. Wir sind sogar genötigt, seine äufserst zweckmäfsige Symbolik hier zu umgehen. Nur möchten wir in gedrängter Kürze zweier im Mittelpunkte der Theorie stehender Prinzipien Erwähnung thun und unmittelbar nachher vom zweiten eine Anwendung machen auf das schon früher[48,10] behandelte Problem der m Winkel zweier zu einander windschiefer Räume R_m, R'_m.

In seiner einfachsten Form sagt das Korrespondenzprinzip von Chasles folgendes aus: „Besteht zwischen den Elementen a und b einer nämlichen einfach unendlichen Elementenreihe eine Verwandtschaft (m, n), d. h. entsprechen irgend einem Elemente b eine Anzahl von m Elementen a und irgend einem Elemente a eine Anzahl von n Elementen b, so giebt es $m + n$ Koincidenzen von einander entsprechenden Elementen a, b." In folgender algebraischen Form tritt der Beweis des Satzes unmittelbar hervor: „Wenn die zwei Veränderlichen x und y mittels der Gleichung $f(x, y) = 0$ zusammenhängen, wo $f(x, y)$ ein Polynom vom Grade m in x und vom Grade n in y ist, so giebt es $m + n$ Paare einander entsprechender Werte von x und y, für welche $x = y$ ist."

Das Prinzip der Erhaltung der Zahl kann folgendermafsen gefafst werden: „Behält der Unendlichkeitsgrad p irgend einer von einigen gegebenen Figuren abhängigen Zahl N seinen Wert bei, falls die Lageverhältnisse dieser Figuren zu einander auf eine bestimmte Weise geändert werden, so behält dabei auch die Zahl N selbst insofern ihren Wert bei, dafs sie sich nur um eine Gröfse niedrigeren Unendlichkeitsgrades vergröfsern oder verringern kann." Gewöhnlich erklärt man die Bedeutung des Prinzips mittels des bekannten Beispiels der zwei gemeinschaftlichen Transversalen zu vier im Raume gegeben vorliegenden Geraden.

Digitized by Google

Ersetzt man in diesem Beispiele, wo $p = 0$ ist, die vier je zwei zu einander windschiefen Geraden des allgemeinen Falles durch zwei Paare einander schneidender Geraden, so findet man noch immer zwei gemeinschaftliche Transversalen, die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Paare und die Schnittlinie der Ebenen der Paare. Und wenn die vier Geraden eine solche Lage gegen einander haben, dafs es drei gemeinschaftliche Transversalen giebt, so giebt es deren unendlich viele, wie im Falle von vier Strahlen einer der beiden Regelscharen eines Hyperboloids, u. s. w.

Obgleich dieses letztere Prinzip zu einer Fülle von schönen und Zutrauen erregenden Resultaten geführt hat, so giebt es zur Zeit doch noch viele bedeutende Mathematiker, welche nicht umhin können seine Richtigkeit anzuzweifeln. Allerdings liegt ein ganz strenger Beweis des Prinzips in seinem gröfsten Umfange wirklich nicht vor; hat denn auch neulich D. Hilbert (vergl. „Mathematische Probleme", *Archiv der Math. u. Ph.*, dritte Reihe, Bd. I, S. 223) zu einer strengen Begründung des Prinzips aufgefordert. Natürlich ist der Beweis ganz einfach, wenn es sich für $p = 0$ um die Zahl der durch eine einzige Gleichung bestimmten Lösungen handelt; denn in diesem Falle sagt es nur aus, dafs eine Gleichung n^{ten} Grades mit $n + 1$ Wurzeln eine Identität ist. Und in den Anwendungen ist es durchaus notwendig sich von den verschiedenen Charakteren und von der Vielfachkeit der verschiedenen Lösungen Rechenschaft zu geben, wenn die Abzählung keine „Fehlerquelle der modernen Geometrie" werden soll (vergl. C. Küpper, *Math. Ann.*, Bd. 32, S. 282).

Folgendes Beispiel, wo der Schubert'sche Satz zu versagen scheint, rührt von E. Study her. Man betrachte vier Punkte A, B, C, D einer Gerade und suche auf dieser Gerade die Zahl der Paare zu einander projektiver Punktreihen, welche das Punktquadrupel in sich transformieren. Man findet dann, scheinbar in offenbarem Widerspruche zum Prinzipe der Erhaltung der Zahl, drei Lösungen im allgemeinen Falle eines willkürlichen Punktquadrupels und entweder sechs oder sieben Lösungen in den speziellen Fällen eines harmonischen oder äquianharmonischen Wurfes. Es hat sich hier also die Zahl drei der Lösungen in be-

Digitized by Google

sonderen Fällen gehoben ohne unendlich zu werden, was dem Prinzipe zu widersprechen scheint. Allein dieser Widerspruch verschwindet bei Berücksichtigung der verschiedenen Charaktere der Lösungen. Läfst man die identische Transformation, wobei jeder Punkt der Gerade in sich transformiert wird, beiseite, so können die vier Punkte A, B, C, D entweder die zwei, oder einen der zwei, oder keinen der zwei Doppelpunkte aufnehmen und hat man im letzten Falle noch zu unterscheiden, ob die vier Punkte eine cyklische Gruppe von vier oder zwei cyklische Gruppen von zwei Punkten bilden. Also liegen theoretisch vier Möglichkeiten vor, welche mit Hilfe der Symbole $[A, B, (CD)]$, $[A, (BCD)]$, $(ABCD, BCDA)$, $[(AB), (CD)]$ angedeutet werden können. Und nun hat man jede dieser vier Transformationsarten, welchen ganz verschiedene Gleichungen entsprechen, nur an und für sich zu betrachten, um den erwähnten Widerspruch zu beseitigen. Es sind nämlich die Zahlen der vier Lösungsarten (0, 0, 0, 3) im allgemeinen Falle, (2, 0, 1, 3) bei einem harmonischen Wurfe und (0, 4, 0, 3) bei einem äquianharmonischen Wurfe. Also hat die Zahl 3 der einzig möglichen Lösungsart des allgemeinen Falles sich wirklich erhalten und hat sich die Unendlichkeitszahl p der ersten und der dritten Lösungsart beim harmonischen sowie derjenige der zweiten Lösungsart beim äquianharmonischen Wurfe von der negativen Einheit bis zur Null gehoben.

Aufgabe 283. Was ist zu verstehen unter einem Gebilde mit der negativen Einheit als Konstantenzahl?

Aufgabe 284. Kann man nicht auch behaupten, dafs die Lösungenanzahl des Problems in den erwähnten Fällen der Reihe nach durch die Symbole (0, 0, 0, 3), (2, 0, 2, 3), (0, 8, 0, 3) angegeben wird und also respektive 3, 7, 11 beträgt?

[Je nachdem man zwei Lösungen, welche bei Vertauschung der beiden projektiven Punktreihen in einander übergehen, einmal oder zweimal rechnet, erhält man 3, 6, 7 oder 3, 7, 11 Lösungen.]

129. **Ein anzahlgeometrisches Problem.** Bei der Bestimmung der Winkel zwischen zwei Räumen mit Hilfe der uneigentlichen Gerade der Ebene eines Neigungswinkels[48,10]

Digitized by Google

haben wir das Problem im R_{2d-1} die Zahl der Geraden zu bestimmen, welche mit jedem von vier zu einander windschiefen Räumen R_{d-1} einen Punkt gemein haben, seitlich berührt und versprochen auf dieses Problem zurückzukommen. Wir lösen jetzt das Versprechen ein, obgleich das Problem in Aufgabe 225 schon auf andere Weise erledigt wurde, und bemerken dann sofort, dafs die Gerade im R_{2d-1} die Konstantenzahl $2(2d-2)$ hat und der Bedingung, dafs sie mit einem gegebenen Raume R_{d-1} einen Punkt gemein habe, die Konstantenzahl $d-1$ zukommt, wie Substitution von $n=2d-1$, $d_1=1$, $d_2=d-1$, $d_3=0$ in das allgemeine Resultat $(n-d_1-d_2+d_3)(d_3+1)$ lehrt; woraus deshalb hervorgeht, dafs die Gerade im R_{2d-1} wirklich vier Räume R_{d-1} zu schneiden imstande ist und die Zahl der Lösungen im allgemeinen eine endliche sein mufs. Wir bestimmen nun weiter diese endliche Zahl mit Hilfe des Prinzips der Erhaltung der Zahl und nehmen dazu an, dafs die vier gegebenen Räume R_{d-1}, R'_{d-1}, S_{d-1}, S'_{d-1} sich so bewegt haben, dafs R_{d-1}, R'_{d-1} den Punkt P und S_{d-1}, S'_{d-1} den Punkt Q gemein haben. Es ist dann nämlich, wie wir sogleich zeigen wollen, die Zahl der Lösungen endlich geblieben. Denn diese Lösungen bestehen scheinbar aus vier, in Wirklichkeit aber nur aus zwei endlichen Gruppen. Die erste Gruppe wird von der vereinzelten Gerade PQ gebildet. Die zweite Gruppe, welche die durch P gehenden und S_{d-1}, S'_{d-1} in verschiedenen Punkten schneidenden Geraden enthalten soll, verschwindet; denn der durch die sich in Q schneidenden Räume S_{d-1}, S'_{d-1} bestimmte Raum S_{2d-2}, welcher alle Geraden dieser Gruppe enthalten mufs, geht nicht durch P. Ebenso verschwindet, weil der durch R_{d-1}, R'_{d-1} bestimmte Raum R_{2d-2} nicht durch Q geht, die dritte Gruppe. Bleibt also aufser PQ die vierte Gruppe der Geraden, welche die vier Räume mit $d-1$ Dimensionen in vier verschiedenen Punkten schneiden. Deshalb liegt jede Gerade dieser vierten Gruppe sowohl in R_{2d-2} wie in S_{2d-2}, d. h. im Schnittraume R_{2d-3} von R_{2d-2} und S_{2d-2}, welcher mit den im R_{2d-2} liegenden R_{d-1}, R'_{d-1} und den im S_{2d-2} liegenden S_{d-1}, S'_{d-1} der Reihe nach die Räume R_{d-2}, R'_{d-2}, S_{d-2}, S'_{d-2} gemein hat. Also mufs jede Gerade der vierten Gruppe im R_{2d-3} vier zu einander windschiefe Räume von $d-2$ Dimensionen schneiden und stehen wir

Digitized by Google

bei der Bestimmung der Anzahl dieser Geraden wieder dem ursprünglichen Probleme mit einem um die Einheit verringerten Werte von d gegenüber. Achtet man auf die vereinzelte Lösung PQ, so findet man also, dafs die Zahl der Lösungen um die Einheit kleiner wird, wenn dies mit d der Fall ist; deshalb mufs auch umgekehrt die gesuchte Zahl um die Einheit wachsen, wenn dies mit d der Fall ist. Allein für $d = 2$ ist die Zahl der Geraden auch zwei; deshalb ist allgemein die Zahl der Lösungen d, wie früher behauptet wurde.

Wir weisen auf die grundsätzliche Übereinstimmung der hier entwickelten Methode mit derjenigen von Nr. 48 hin, indem in beiden die Zurückführung des ursprünglichen Falles auf den Fall einer um die Einheit herabgesetzten d zu einer Lösung führt.

Aufgabe 285. Kann man auch vom Falle $d = 1$ aus aufsteigen?

Aufgabe 286. Beweise, dafs die Geraden der zweiten und dritten Gruppe auch deshalb verschwinden, weil die Zahl der einfachen Bedingungen, welchen sie unterliegen, die Konstantenzahl $4(d-1)$ übertrifft.

Wir wiederholen, dafs mittels Konstantenzahlbetrachtungen im allgemeinen nur beurteilt werden kann, ob irgend ein Problem eine endliche Zahl von Lösungen zuläfst oder nicht, im ersten Falle jedoch die Anzahl der Lösungen auf andere Weise, z. B. mittels des Prinzips der Erhaltung der Zahl, ermittelt werden mufs. Obgleich wir für die allgemeinen Resultate, zu welchen die Anwendung dieses Prinzips auf lineare Gebilde führt, auf die schönen Arbeiten Schubert's verweisen müssen (vergl. u. a. *Acta Math.*, Bd. 3, S. 1), so hat die formelle Analogie zwischen der Behandlung des obigen Problems mittels dieses Prinzips und derjenigen[48], welche auf den Minimumeigenschaften des Winkels beruht, uns verleitet, für dieses Problem eine Ausnahme zu machen.

Aufgabe 287. Bildet das Resultat, nach welchem es im R_{2d-1} d Geraden giebt, welche vier willkürlich gegebene Räume R_{d-1} schneiden, die einzige mehrdimensionale Verallgemeinerung des Satzes, dafs vier Geraden im Raume zwei gemeinschaftliche Transversalen zulassen?

Digitized by Google

[Nein; denn Schubert fand viel allgemeiner (vergleiche *Hamb. Mitt.*, Bd. 3, S. 87), dafs es im R_n eine Anzahl von

$$\frac{2!\,3!\ldots d!\,[(n-d)\,(d+1)]!}{(n-d)!\,(n-d+1)!\ldots..n!}$$

Räumen R_d giebt, welche mit jedem von $(n-d)\,(d+1)$ willkürlich gegebenen Räumen R_{n-d-1} einen Punkt gemein haben.]

---

§ 9. Polygonometrie.

130. **Das vierdimensionale Vierkant.** Vier Halbstrahlen durch einen Punkt O, welche nicht in einem nämlichen Raume liegen, und die sie zu je zwei und drei verbindenden Ebenen und Räume bilden eine Figur, welche wir ein vierdimensionales Vierkant oder, wenn dies keine Verwirrung verursachen kann, schlechthin ein Vierkant nennen wollen. Denkt man sich (Fig. 63) zur Erleichterung

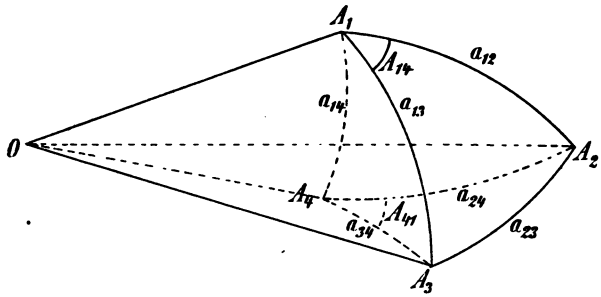


Fig. 63.

der Versinnlichung dieser Figur auf den vier Kanten gleiche Strecken OA_i abgetragen und die Punkte A_i zu je zwei durch Kreisbogen um O, zu je drei durch von sphärischen Dreiecken begrenzte Stücke von Kugelflächen um O mit einander verbunden, so entsteht ein krummliniges Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$, dessen sechs Kanten Kreisbogen und dessen vier Seitenflächen sphärische Dreiecke sind. An diesem

Digitized by Google

krummlinigen vierdimensionalen Tetraeder erscheinen alle beim Vierkant auftretenden Winkel, welche wir deshalb in Kantenwinkel, Flächenwinkel und Raumwinkel einteilen. Also giebt es sechs Kantenwinkel $A_1 O A_2 = a_{12}$, vier Tripel von Flächenwinkeln $A_1 (O A_2) A_3 = A_{24}$ — die Winkel der vier sphärischen Dreiecke — und sechs Raumwinkel $A_1 (A_2 O A_3) A_4 = \alpha_{14}$. Dabei ist zu bemerken, dafs die Reihenfolge der beiden Indices nur bei den Flächenwinkeln von Einflufs ist. Bezeichnet man nämlich die den Kanten $O A_i$ gegenüberliegenden Räume mit α_i, so beziehen sich die beiden Indices von a_{12} und α_{12} auf die ebenbürtigen Schenkel und Schenkelräume, indem bei A_{12} der erste Index sich auf die Scheitelkante, der zweite sich auf den Raum des Winkels bezieht.

Ist ϱ die gemeinschaftliche Länge der Strecken $O A_i$, so hat man die Beziehung $A_i A_k = 2\varrho \sin \frac{1}{2} a_{i,k}$. Da man nun die sechs Kanten eines Tetraeders innerhalb gewisser Bedingungen von Ungleichheit willkürlich wählen kann, so sind auch die sechs Kantenwinkel $a_{i,k}$ durch keine Gleichheitsbedingung mit einander verknüpft. Zwischen den sechs das Vierkant bestimmenden Kantenwinkeln existieren also nur die Bedingungsgruppen

$$a_{23} + a_{31} > a_{12}, \quad 0 < a_{23} + a_{31} + a_{12} < 2\pi,$$

welche aus den vier sphärischen Dreiecken abzulesen sind. Weiter geben diese bekanntlich auch die Beziehungen

$$\pi < A_{14} + A_{24} + A_{34} < 3\pi$$

an. Und nun lehrt das *Polvierkant* $O'(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4)$, dessen Kanten $O' A'_i$ erhalten werden, wenn man aus irgend einem innerhalb des ursprünglichen Vierkants $O(A_1 A_2 A_3 A_4)$ liegenden Punkte O' auf die Räume dieses Vierkants Lote fällt, zufolge der zwischen den Winkeln $a'_{i,k}$, $A'_{i,k}$, $\alpha'_{i,k}$ dieses neuen Gebildes und denen des ursprünglichen bestehenden Beziehungen

$$a'_{i,k} = \pi - \alpha_{i,k}, \quad A'_{i,k} = \pi - A_{k,i}, \quad \alpha'_{i,k} = \pi - a_{i,k},$$

welche auf aus dem dreidimensionalen Raume bekannte Weise aus der Figur hervorgehen, dafs zu den obigen Gruppen von Ungleichheitsbedingungen noch die folgenden

Digitized by Google

$$\alpha_{23} + \alpha_{31} < \pi + \alpha_{12},\ \pi < \alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{12} < 3\pi,$$
$$0 < A_{41} + A_{42} + A_{43} < 2\pi$$

hinzuzufügen sind.

Wie berechnet man die zwölf Winkel $A_{i,k}$ und die sechs Winkel $\alpha_{i,k}$, wenn die sechs Winkel $a_{i,k}$ gegeben sind? Die Beantwortung von Fragen dieser Art fällt der vierdimensionalen Tetragonometrie anheim. Natürlich können wir nicht daran denken, die ganze Formelmasse dieser Wissenschaft zu entwickeln; deshalb beschränken wir uns auf einige vereinzelte Bemerkungen.

Sind die sechs Winkel $a_{i,k}$ gegeben, so liefern die Formeln der Trigonometrie zunächst die zwölf Winkel $A_{i,k}$. Anwendung dieser Formeln auf das Polvierkant, von welchem dann die zwölf Winkel $A'_{i,k}$ bekannt sind, liefert nun sofort die sechs Winkel $a'_{i,k}$ und also auch die sechs Raumwinkel $\alpha_{i,k}$ des ursprünglichen Vierkants. Also kann in diesem Falle die Berechnung der unbekannten Elemente mit ausschliefslicher Hilfe der trigonometrischen Formeln ausgeführt werden.

Aufgabe 288. Die spitzen Winkel $a_{i,k}$ sind mittels der Gleichungen

$$a_{12} = a_{24} = \frac{\pi}{4},\ \cos a_{13} = \sin a_{23} = \frac{1}{3}\sqrt{3},\ a_{14} = \frac{\pi}{3},$$
$$a_{34} = \frac{\pi}{6}$$

gegeben; berechne die Winkel $A_{i,k}$ und $\alpha_{i,k}$.

[Man findet

$$A_{12} = a_{23},\ A_{13} = A_{41} = A_{43} = a_{13},\ A_{14} = A_{21} = \frac{\pi}{4},$$
$$A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = \frac{\pi}{2},\ A_{34} = \frac{\pi}{3},\ \cos A_{42} = \frac{1}{3},$$

und

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \frac{\pi}{3},\ \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{24} = \frac{\pi}{2},\ \alpha_{34} = \frac{\pi}{4}.]$$

131. **Konstruktion der Raumwinkel des Vierkants.** Sind die Kantenwinkel $a_{i,k}$ gegeben, so findet man mit Hilfe der dreidimensionalen darstellenden Geometrie die Flächen-

Digitized by Google

winkel; wir zeigen hier wie eine analoge Konstruktion im Raume die sechs Raumwinkel finden läfst. Da letztere nur eine vierdimensionale Verallgemeinerung eines bekannten planimetrischen Verfahrens bildet, so ist es ratsam sich von jedem Schritte durch die entsprechende Schlufsweise dieses einfacheren Verfahrens Rechenschaft zu geben.

Wir denken uns das Vierkant mit seinem Raume $O(A_1 A_2 A_3)$ mit unserem Raume in Berührung (Fig. 64)

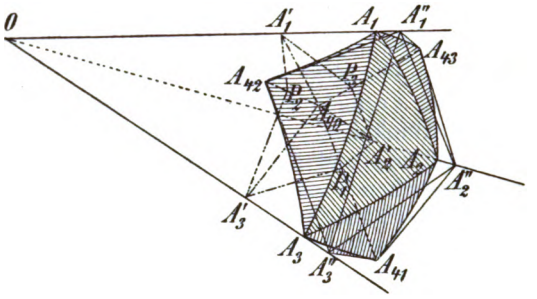


Fig. 64.

und klappen nun die drei anderen Räume $O(A_2 A_3 A_4)$, $O(A_1 A_3 A_4)$, $O(A_1 A_2 A_4)$ mittels Drehung um die Schnittebenen $O(A_2 A_3)$, $O(A_1 A_3)$, $O(A_1 A_2)$ mit $O(A_1 A_2 A_3)$ in unsern Raum um. So erhalten wir auf der Kugel um O mit OA_i als Radius einen von vier sphärischen Dreiecken gebildeten Dreistern; dem Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ lehnen sich auf dieser Kugel die Dreiecke $A_2 A_3 A_{41}$, $A_1 A_3 A_{42}$, $A_1 A_2 A_{43}$ mit ihren gleichnamigen Seiten an. Fällt man nun aus den Punkten A_{41}, A_{42}, A_{43}, welche bei Zurückdrehung in den vierdimensionalen Raum mit A_4 zusammenfallen, Lote auf die Seitenflächen $O(A_2 A_3)$, $O(A_1 A_3)$, $O(A_1 A_2)$, so schneiden sich diese in einem Punkte A_{40}, die senkrechte Projektion von A_4 auf unsern Raum. Sind nun P_1, P_2, P_3 die Schnittpunkte der Lote mit den Seitenflächen, auf welche wir sie gefällt haben, so projizieren sich die Strecken $A_{41} P_1, A_{42} P_2, A_{43} P_3$ als $A_{40} P_1, A_{40} P_2, A_{40} P_3$ auf unsern Raum und sind deshalb die Verhältnisse

Digitized by Google

$$\frac{A_{40}P_1}{A_{41}P_1}, \frac{A_{40}P_2}{A_{42}P_2}, \frac{A_{40}P_3}{A_{43}P_3}$$

die Cosinus der Winkel $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$.

Aufgabe 289. Wie beweist man, dafs die drei nicht in einer nämlichen Ebene liegenden Lote sich zu je zwei schneiden?

[Mit Hilfe der Bemerkung, dafs die Lote aus A_{42} und A_{43} auf OA_1, wegen der Gleichheit von A_1A_{42} und A_1A_{43} den nämlichen Fufspunkt A_1' haben, u. s. w.]

Die übrigen drei Winkel $\alpha_{23}, \alpha_{13}, \alpha_{12}$, welche die drei Räume $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu je zwei mit einander bilden, erhält man mittels der Thatsache, dafs irgend ein auf ihrer Schnittlinie OA_4 senkrecht stehender Raum sie in drei Ebenen schneidet, welche zu je zwei die drei gesuchten Winkel mit einander bilden. Denken wir uns diesen neuen Raum durch den Punkt A_4 gelegt, so schneidet er die Räume $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in Ebenen, welche nach Umlegung dieser Räume in unsern Raum in A_{41}, A_{42}, A_{43} auf den Radien dieser Punkte senkrecht stehen. Also findet man die Schnittebene dieses neuen Raumes mit unserm Raume mit Hilfe der Spurgeraden $A_2''A_3'$, $A_1''A_3''$, $A_1''A_2''$ dieser drei Berührungsebenen der Kugel mit den Seitenflächen des Dreikants $O(A_1A_2A_3)$ und nun liefert Umlegung des im zu OA_4 senkrechten Raume liegenden Tetraeders $A_1''A_2''A_3''A_4$ keine Schwierigkeit mehr, weil $A_1''A_{42} = A_1''A_{43}$, $A_2''A_{41} = A_2''A_{43}$, $A_3''A_{41} = A_3''A_{42}$ die wirkliche Länge der Kanten durch A_4 angeben.

Aufgabe 290. Beweise, dafs die Ebene $A_1''A_2''A_3''$ im Schnittpunkte A_4' mit OA_{40} senkrecht auf dieser Gerade steht.

Aufgabe 291. Beweise, dafs die Umlegung des Tetraeders $A_1''A_2''A_3''A_4$ um $A_1''A_2''A_3''$ in unsern Raum den Punkt A_4 auf OA_{40} bringt.

[Die senkrechte Projektion von A_4 auf unsern Raum befindet sich ursprünglich in A_{40}, und bei der Umlegung durchläuft sie das aus A_{40} auf die Ebene $A_1''A_2''A_3''$ gefällte Lot, d. h. die Gerade OA_{40}.]

Digitized by Google

Aufgabe 292. Wie lautet die Konstruktion, wenn α_{14} und die sechs Kantenwinkel $\alpha_{i,k}$ mit Ausnahme von α_{14} gegeben sind?

[Man gehe (Fig. 64) von den sphärischen Dreiecken $A_1 A_2 A_3$ und $A_2 A_3 A_{41}$ auf der nämlichen Kugel um O aus und konstruiere den Punkt A_{40} des Lotes $A_{41} P_1$ aus A_{41} auf $O(A_2 A_3)$ mit Hilfe der Beziehung $A_{41} P_1 \cos \alpha_{14} = A_{40} P_1$. Nachher findet man A_{42} als einen der beiden zu $O(A_1 A_3)$ symmetrisch liegenden Schnittpunkte der Ebene durch $O A_{40}$ senkrecht zu $O(A_1 A_3)$ mit demjenigen kleinen Kreise der Kugel, welcher A_3 und α_{34} zu sphärischem Mittelpunkte und sphärischem Radius hat. Dann sind wieder die sechs Winkel $\alpha_{i,k}$ bekannt.]

Aufgabe 293. Gegeben α_{14}, α_{24} und die Kantenwinkel α_{ik} mit Ausnahme von α_{14}, α_{24}. Man fragt α_{14}, α_{24} zu konstruieren.

[Fällt man aus jedem Punkte P der Ebene des in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe erwähnten kleinen Kreises Lote auf die Ebenen $O(A_1 A_3)$, $O(A_2 A_3)$ und verlängert man diese Lote nach der entgegengesetzten Seite um ihre mit $\cos \alpha_{14}$, $\cos \alpha_{24}$ multiplizierten Beträge, so erhält man zwei neue Ebenen, die sich in einer durch A_3' gehenden Gerade schneiden. Man findet dann weiter A_{42} als einen der beiden zu $O(A_1 A_3)$ symmetrischen Schnittpunkte der Ebene durch diese Gerade senkrecht zu $O(A_1 A_3)$ mit dem kleinen Kreise.]

Aufgabe 294. Gegeben $\alpha_{23}, \alpha_{13}, \alpha_{12}$ und $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$, man fragt $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ zu konstruieren.

[Offenbar sind $A_{43} A_1' P_3$, $P_3 A_1' P_2$, $P_2 A_1' A_{42}$ in der Ebene in A_1' senkrecht zu $O A_1$ die drei Seiten des Dreikants, in welchem der in A_1' zu $O A_1$ senkrechte Raum die drei durch $O A_1$ gehenden Räume $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des Vierkants schneidet. Deshalb findet man die Projektion $A_1' A_{40}$ der Kante $O A_4$ auf die Ebene $P_3 A_1' P_2$ mit Hilfe der Lösung des Problems: von einem Dreikante sind eine Seite $P_3 A_1' P_2$ und die anliegenden Winkel α_{24}, α_{34} gegeben; die Projektion der dritten Kante auf $P_3 A_1' P_2$ zu bestimmen. Durch Wiederholung dieser

Digitized by Google

Konstruktion für OA_2 erscheint OA_{40} als Durchschnitt zweier Ebenen, u. s. w.]

Aufgabe 295. Gegeben die sechs Winkel $\alpha_{i,k}$; die sechs Winkel $\alpha_{i,k}$ zu konstruieren.

[Man geht zum Polvierkant über und folgt den oben angedeuteten Weg.

Mit Hilfe des Polvierkants ist nun jedes andere Problem, wobei von den zwölf Winkeln $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{i,k}$ irgend sechs ohne Wiederholung der Indicespaare gegeben sind, als gelöst zu betrachten. Und auf andere Probleme der nämlichen Art gehen wir hier nicht ein.]

Aufgabe 296. Man ersetzt der Reihe nach irgend eine Anzahl der vier Halbstrahlen eines Vierkants durch die entgegengesetzt gerichteten Halbstrahlen. Wie ändern sich dann die 24 Winkel des Vierkants?

Aufgabe 297. Können zwei in Bezug auf den gemeinschaftlichen Scheitel O in R_4 zu einander symmetrische Vierkante in R_4 zur Deckung gebracht werden?

[Man denke sich durch O vier zu einander senkrechte Achsen gelegt und drehe nun R_4 so um O, dafs jeder Punkt P in die zu P in Bezug auf O symmetrische Lage kommt; hierzu ist nur nötig, dafs die Projektionen P_{12} und P_{34} von P in den Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$ um O Halbkreise beschreiben.]

Aufgabe 298. Zähle die Hauptfälle der Gleichheit zweier Vierkante ab.

132. **Berechnung der Winkel zwischen den gegenüberliegenden Elementen des Vierkants.** Wir bestimmen in erster Linie den Winkel zwischen OA_1 und dem Raume $O(A_2 A_3 A_4)$ mit Hilfe des schiefwinkligen Koordinatensystems mit OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 als Achsen. Ist P irgend ein Punkt des in O auf dem Raume $O(A_2 A_3 A_4)$ errichteten Lotes, ist p die Länge von OP und sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten von P, so ergiebt sich[71], wenn wir OP und den Koordinatenweg $OP_1 P_{12} \ldots P$ von P successive auf alle Achsen projizieren und der gesuchte Winkel mit φ_1 bezeichnet wird,

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & + x_2 \cos a_{12} + x_3 \cos a_{13} + x_4 \cos a_{14} = p \sin \varphi_1 \\ x_1 \cos a_{21} + x_2 & + x_3 \cos a_{23} + x_4 \cos a_{24} = 0 \\ x_1 \cos a_{31} + x_2 \cos a_{32} + x_3 & + x_4 \cos a_{34} = 0 \\ x_1 \cos a_{41} + x_2 \cos a_{42} + x_3 \cos a_{43} + x_4 & = 0 \end{array}\right].$$

Weiter ist

$$p = x_1 \sin \varphi_1.$$

Also giebt Elimination der Verhältnisse der Koordinaten von P nach Substitution des Wertes von p

$$\begin{vmatrix} 1 - \sin^2 \varphi_1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix}}. \qquad 95)$$

Es ist der Nenner der rechten Seite nach von Staudt das Quadrat vom Sinus des körperlichen Winkels D_1 des Dreikants $O(A_2 A_3 A_4)$ genannt worden; auf analoge Weise mag nun der Zähler des nämlichen Bruches das Quadrat vom Sinus des vierdimensionalen Winkels V des Vierkants $O(A_1 A_2 A_3 A_4)$ heifsen. Allgemein gilt dann die Beziehung

$$\sin \varphi_i \sin D_i = \sin V, \qquad 96)$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

welche als eine vierdimensionale Verallgemeinerung des analogen Satzes von den drei sphärischen Höhen eines sphärischen Dreiecks betrachtet werden kann.

Aufgabe 299. Ist es wohl erlaubt, diesen Nenner als das Quadrat eines Sinus zu betrachten, so lange noch nicht

Digitized by Google

gezeigt worden ist, daſs der Wert der Determinante vierter Ordnung zwischen Null und Eins liegt?]

[Allerdings nicht; allein diese Eigenschaft der Determinante ergiebt sich aus den Gleichungen 95) selbst.]

Aufgabe 300. Berechne die vier Winkel φ_i des Vierkants von Aufgabe 288.

[Man findet für den Wert der Determinante $\frac{1}{24}$ und für ihre Minoren nach den Elementen der Hauptdiagonale der Reihe nach $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; also hat man

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{1}{2},\ \sin^2\varphi_2 = \sin^2\varphi_4 = \frac{1}{4},\ \sin^2\varphi_3 = \frac{1}{6}.]$$

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der beiden Winkel zwischen den einander gegenüberliegenden Ebenen $O(A_1A_2)$ und $O(A_3A_4)$ des Vierkants. Dazu denken wir uns (Fig. 65) die zu einander senkrechten Ebenen dieser Winkel durch O und ihre Schnittpunktenpaare (B, C) und (B', C') mit den Bogen A_1A_2 und A_3A_4 bestimmt. Indem die Bogen BB' und CC' dann rechte sind, bezeichnen wir die Segmente A_1B und BA_2 von A_1A_2 mit p und q, die Segmente A_3C und CA_4 von A_3A_4 mit r und s und die gesuchten Winkel BOC und $B'OC'$ mit u und v. Wird A_3 nun noch mit B und B' verbunden durch Kreisbogen A_3B und A_3B' mit dem Mittelpunkte O, so geben die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke A_3BC und $A_3B'C'$

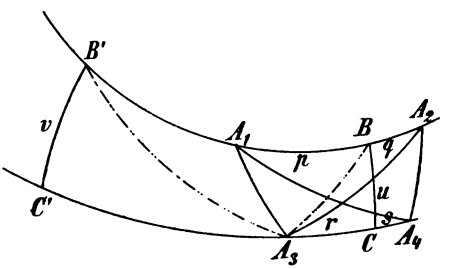


Fig. 65.

$$\cos A_3B = \cos r \cos u,\quad \cos A_3B' = \sin r \cos v.$$

Digitized by Google

Weiter giebt das rechtseitige sphärische Dreieck $A_3 B B'$

$$\sin A_3 B \cos \angle A_3 B B' = \cos A_3 B'$$

und das sphärische Dreieck $A_1 A_3 B$

$$\cos a_{13} = \cos p \cos A_3 B + \sin p \sin A_3 B \cos \angle A_3 B B'.$$

So findet man endlich:

$$\cos a_{13} = \cos p \cos r \cos u + \sin p \sin r \cos v.$$

Auf die nämliche Weise findet man ähnliche Ausdrücke für $\cos a_{24}$, $\cos a_{14}$, $\cos a_{23}$. Schliefslich hat man zwischen den sechs Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos a_{13} &= \cos p \cos r \cos u + \sin p \sin r \cos v \\ \cos a_{24} &= \cos q \cos s \cos u + \sin q \sin s \cos v \\ \cos a_{14} &= \cos p \cos s \cos u - \sin p \sin s \cos v \\ \cos a_{23} &= \cos q \cos r \cos u - \sin q \sin r \cos v \\ a_{12} &= (p + q) \\ a_{34} &= (r + s) \end{aligned}\right\} \quad 97)$$

die vier Gröfsen p, q, r, s zu eliminieren und aus den zwei übrigbleibenden Gleichungen u und v aufzulösen.

Durch Substitution findet man unmittelbar

$$\begin{aligned} &\cos a_{13} \cos a_{24} - \cos a_{14} \cos a_{23} \\ &= \cos u \cos v \,[\, \cos p \cos r \sin q \sin s + \cos q \cos s \sin p \sin r \\ &\qquad + \cos p \cos s \sin q \sin r + \cos q \cos r \sin p \sin s] \\ &= \cos u \cos v \;(\sin p \cos q + \cos p \sin q)\,(\sin r \cos s + \cos r \sin s) \\ &= \cos u \cos v \;\; \sin a_{12} \sin a_{34}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\pm \cos u \cos v = \frac{\cos a_{13} \cos a_{24} - \cos a_{14} \cos a_{23}}{\sin a_{12} \sin a_{34}} \quad 98)$$

eine der zwei gesuchten Gleichungen; das doppelte Zeichen mufs hinzugefügt werden, weil man nicht weifs, ob die Lage der Punkte B, B' auf $A_1 A_2$ und C, C' auf $A_3 A_4$ der bei

Digitized by Google

der Berechnung zu Grunde gelegten Anordnung von Fig. 65 entspricht.

Die zweite der gesuchten Gleichungen wird mittels Umbildung der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix}$$

erhalten. Ersetzt man die sechszehn Elemente durch folgende Werte

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos p \cos p + \sin p \sin p \\ \cos a_{12} &= \cos p \cos q - \sin p \sin q \\ \cos a_{13} &= \cos p \cos r \cos u + \sin p \sin r \cos v \\ \cos a_{14} &= \cos p \cos s \cos u - \sin p \sin s \cos v \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a_{21} &= \cos q \cos p - \sin q \sin p \\ 1 &= \cos q \cos q + \sin q \sin q \\ \cos a_{23} &= \cos q \cos r \cos u - \sin q \sin r \cos v \\ \cos a_{24} &= \cos q \cos s \cos u + \sin q \sin s \cos v \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a_{31} &= \cos r \cos p \cos u + \sin r \sin p \cos v \\ \cos a_{32} &= \cos r \cos q \cos u - \sin r \sin q \cos v \\ 1 &= \cos r \cos r + \sin r \sin r \\ \cos a_{34} &= \cos r \cos s - \sin r \sin s \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a_{41} &= \cos s \cos p \cos u - \sin s \sin p \cos v \\ \cos a_{42} &= \cos s \cos q \cos u + \sin s \sin q \cos v \\ \cos a_{43} &= \cos s \cos r - \sin s \sin r \\ 1 &= \cos s \cos s + \sin s \sin s \end{aligned}\right\},$$

so zerlegt sich Δ in die Summe von 16 einfacheren Determinanten, von welchen 12 unmittelbar verschwinden, weil sie zwei Horizontalreihen mit zu einander proportionalen entsprechenden Elementen besitzen. Es bleiben dann noch übrig die vier Determinanten

Digitized by Google

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos p, & \cos q, & \cos r \cos u, & \cos s \cos u \\ -\sin p, & \sin q, & -\sin r \cos v, & \sin s \cos u \\ \cos p \cos u, & \cos q \cos u, & \cos r, & \cos s \\ -\sin p \cos v, & \sin q \cos v, & -\sin r, & \sin s \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos p, & \cos q, & \cos r \cos u, & \cos s \cos u \\ -\sin p, & \sin q, & -\sin r \cos v, & \sin s \cos u \\ \sin p \cos v, & -\sin q \cos v, & \sin r, & -\sin s \\ \cos p \cos u, & \cos q \cos u, & \cos r, & \cos s \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sin p, & -\sin q, & \sin r \cos v, & -\sin s \cos v \\ \cos p, & \cos q, & \cos r \cos u, & \cos s \cos u \\ \cos p \cos u, & \cos q \cos u, & \cos r, & \cos s \\ -\sin p \cos v, & \sin q \cos v, & -\sin r, & \sin s \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \sin p, & -\sin q, & \sin r \cos v, & -\sin s \cos v \\ \cos p, & \cos q, & \cos r \cos u, & \cos s \cos u \\ \sin p \cos v, & -\sin q \cos v, & \sin r, & -\sin s \\ \cos p \cos u, & \cos q \cos u, & \cos r, & \cos s \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe von ganz einfachen Operationen, welche sich z. B. bei Δ_1 darauf beschränken, daſs man von der ersten Horizontalreihe die mit $\cos u$ multiplizierte dritte, von der zweiten Horizontalreihe die mit $\cos v$ multiplizierte vierte subtrahiert, findet man, daſs die vier Summanden Δ_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ sämtlich den Wert

$$\sin^2 u \sin^2 v \sin a_{12} \sin a_{34}$$

haben. Deshalb ergiebt sich

$$\Delta = \sin^2 u \sin^2 v \sin^2 a_{12} \sin^2 a_{34} \qquad 99)$$

und findet man

$$\pm \sin u \sin v = \frac{1}{\sin a_{12} \sin a_{34}} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cos a_{13} & \cos a_{14} \\ \cos a_{21} & 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{31} & \cos a_{32} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{41} & \cos a_{42} & \cos a_{43} & 1 \end{vmatrix}}. \qquad 100)$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen 98) und 100) findet man schliefslich $\cos(u - v)$ und $\cos(u + v)$ und also auch u und v.

Aufgabe 301. Berechne die drei Winkelpaare u, v des Vierkants von Aufgabe 288.

Digitized by Google

[Ist von den Winkeln u, v der erste stets der kleinere, so hat man

$$\left.\begin{aligned} u_{12,34} &= a_{13} \\ v_{12,34} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} u_{13,24} &= \frac{\pi}{8} \\ v_{13,24} &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} u_{14,23} &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} a_{23} \\ v_{14,23} &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} a_{23} \end{aligned}\right\}.]$$

Aufgabe 302. Die spitzen Winkel $\alpha_{i,k}$ eines Vierkants sind durch die Gleichungen

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{24} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{34} = \frac{\pi}{5}$$

gegeben; bestimme alle übrigen Winkel dieses Vierkants.

[Man findet

$$A_{21} = \frac{\pi}{5}, \quad A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = \frac{\pi}{2}, \quad A_{34} = \frac{\pi}{3}, \quad a_{12} = \frac{\pi}{10}$$

und

$$\begin{aligned} \cos A_{12} = \cos a_{13} &= \frac{1}{6}(1+\sqrt{5})\sqrt{3} \\ \cos A_{13} &= \frac{1}{15}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} \\ \cos A_{14} &= \frac{1}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})} \\ \cos A_{41} = \cos A_{43} &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \cos A_{42} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos a_{14} &= \frac{1}{8}(3+\sqrt{5})\sqrt{2} \\ \cos a_{23} &= \frac{1}{15}\sqrt{30(5+\sqrt{5})} \\ \cos a_{24} &= \frac{1}{10}\sqrt{10(5+2\sqrt{5})} \\ \cos a_{34} &= \frac{1}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{6} \end{aligned}$$

und hieraus dann für die Winkel zwischen a_{13} und a_{24} die Werte $\frac{\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6}$, u. s. w.]

133. **Das n-dimensionale n-Kant.** Eine Anzahl von Halbstrahlen durch einen Punkt O, welche nicht in einem nämlichen Raume R_{n-1} liegen, und die sie zu je zwei, zu je drei, zu je vier, ... verbindenden Ebenen, Räume, Räume R_4, ... bilden eine Figur in R_n, welche ein n-dimensionales n-Kant oder schlechthin ein n-Kant heifsen mag. Denkt man sich zur leichteren Versinnlichung auf den Kanten wieder gleiche Strecken OA_i abgetragen, so bilden die Endpunkte A_i dieser Strecken die Eckpunkte eines Simplex

Digitized by Google

$S(n)$ nach dessen Elementen die verschiedenen Winkel des n-Kants benannt werden mögen. Mit Hilfe dieses $S(n)$ unterscheiden wir, zunächst beim fünfdimensionalen Fünfkante 10 Kantenwinkel, 10 Tripel von Flächenwinkeln, 5 Sextupel von Raumwinkeln und 10 von zwei einander in einem Raume durchdringenden Räumen R_4 gebildete Winkel, welche mit dem Symbole $\alpha^{(4)}$ bezeichnet werden mögen. So weitergehend ergeben sich dann im allgemeinen bei dem in Rede stehenden n-Kante $(n)_2$ Kantenwinkel, $3(n)_3$ Flächenwinkel, $6(n)_4$ Raumwinkel, $10(n)_5$ Winkel $\alpha^{(4)}$, u. s. w. oder kürzer gefafst $(n)_{k+1}$ Gruppen von $(k)_2$ Winkeln $\alpha^{(k)}$ für die Werte $1, 2, \ldots, n-2, n-1$ von k.

Aufgabe 303. Beweise, dafs ein n-Kant $2^{n-2}(n)_2$ Winkel aufzuweisen hat.

Aufgabe 304. Von einem Fünfkante sind die 10 Kantenwinkel $A_k O A_l$ mittels der Gleichung

$$\operatorname{tang} A_k O A_l = \sqrt{\frac{l-k}{k}}, \quad (k < l)$$

gegeben. Wie berechnet man die übrigen Winkel?

[Man berechnet die 30 Winkel $A_2 (O A_1) A_3$ aus den zehn Dreikanten $O(A_1 A_2 A_3)$, die 30 Winkel $A_3 (O A_1 A_2) A_4$ aus den fünf Vierkanten $O(A_1 A_2 A_3 A_4)$ und die 10 Winkel $A_4 (O A_1 A_2 A_3) A_5$ mit Hilfe des Polfünfkants.

Für die Winkel $A_k (O A_l) A_m$ erhält man folgendes allgemeine Resultat. Für $k < m$ ist $\operatorname{tang} A_k (O A_l) A_m$ entweder $\sqrt{\frac{m-k}{k-l}}$ oder unendlich oder $\sqrt{\frac{l(m-k)}{k(l-m)}}$, je nachdem l von den drei Gröfsen k, l, m entweder die kleinste oder die mittlere oder die gröfste ist.]

Natürlich kann man beim n-Kante auch von den Winkeln zwischen den gegenüberliegenden Elementen reden. Dabei treten dann wieder die Winkel zwischen den Kanten und den ihnen gegenüberliegenden Räumen R_{n-1} durch $n-1$ Kanten in den Vordergrund. Für diese n Winkel φ_i findet man unmittelbar nach der oben[132] entwickelten Methode die den Gleichungen 95) nachgebildeten Gleichungen, wobei man wieder den Begriff des n-dimensionalen Winkels des n-Kants

Digitized by Google

einführen kann. Und weiter handelt es sich dann um die $(n)_3$ Winkelpaare zwischen den Ebenen durch zwei Kanten und ihren durch die übrigen Kanten gehenden Gegenräumen R_{n-2}, um die $(n)_3$ Winkeltripel zwischen den Räumen durch drei Kanten und ihren durch die übrigen Kanten gehenden Gegenräumen R_{n-3}, u. s. w.

Aufgabe 305. Berechne die fünf Winkel φ_i des Fünfkants der vorgehenden Aufgabe.

[Man findet $\Delta = \frac{1}{120}$ und die Minoren nach den Elementen der Hauptdiagonale sind $\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}$. Also hat man

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{1}{2},\ \sin^2\varphi_2 = \frac{1}{4},\ \sin^2\varphi_3 = \frac{1}{6},\ \sin^2\varphi_4 = \frac{1}{8},$$

$$\sin^2\varphi_5 = \frac{1}{5}.]$$

Aufgabe 306. Berechne die n Winkel φ_i des n-Kants, dessen $(n)_2$ Kantenwinkel $A_k O A_l$ durch die in der Aufgabe 304 gegebene Gleichung bestimmt werden.

[Man erhält

$$\sin^2\varphi_p = \frac{1}{2p},\ (p = 1, 2, 3, \ldots n-1),\ \text{und}\ \sin^2\varphi_n = \frac{1}{n}.[$$

Aufgabe 307. Wieviel Winkel enthält das n-Kant, wenn man die Winkel zwischen den einander gegenüberliegenden Elementen mitzählt?

[Man findet

für $n = 2m$ ..... $m\{2^{2m-2}(2m+1) - (2m-1)_{m-1}\}$

„ $n = 2m+1 \ldots (2m+1)\{2^{2m-1}(m+1) - \frac{1}{2}(2m)_m\}$.]

134. **Anwendung der analytischen Geometrie auf das n-Kant.** Wenn das n-Kant auf solche Weise gegeben ist, dafs es leicht ist, die Gleichungen der Kanten in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem anzugeben, so können die verschiedenen Winkel des n-Kants auch mit Hilfe

Digitized by Google

der analytischen Geometrie gefunden werden. Wir zeigen dies am folgenden hierzu besonders geeigneten Beispiele:

„Im R_5 ist ein Fünfkant dadurch bestimmt, dafs der Scheitel mit dem Ursprunge eines gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt und die Kanten durch die Punkte A_i, $(i = 1, 2, \ldots 5)$ mit den Koordinatensystemen

$(1,0,0,0,0)$, $(1,1,0,0,0)$, $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,1,1)$

hindurchgehen. Die 105 Winkel dieses Fünfkants zu berechnen."

Mit Hilfe der äufserst einfachen Gleichungen der Kanten findet man[71₁] für die Cosinus der zehn Kantenwinkel Werte, welche der allgemeinen Formel $\cos A_k O A_l = \sqrt{\frac{k}{l}}$, $k < l$, Genüge leisten. Also ist auch $\operatorname{tang} A_k O A_l = \sqrt{\frac{l-k}{k}}$, $k < l$, und so ergiebt sich dann, dafs das Fünfkant unsres Beispiels mit demjenigen von Aufgabe 304 identisch ist. Wir zeigen jetzt, wie man mittels analytischer Betrachtungen successive die Cosinus der 30 Winkel $A_q(OA_p)A_r$, der 30 Winkel $A_r(OA_pA_q)A_s$ und der 10 Winkel $A_s(OA_pA_qA_r)A_t$ findet, um nachher zu den verschiedenen Winkeln zwischen den einander gegenüberliegenden Elementen zu schreiten.

Zur Bestimmung des Winkels $A_q(OA_p)A_r$ der Ebenen OA_pA_q und OA_pA_r, welche die Gerade OA_p gemein haben und im Raume $OA_pA_qA_r$ liegen, suchen wir die Schnittgeraden dieses Raumes mit den in O zu den Ebenen OA_pA_q und OA_pA_r senkrechten Räumen $\alpha_{p,q}$ und $\alpha_{p,r}$; der spitze Winkel dieser beiden Geraden ist dann der verlangte. Für den Fall des Winkels $A_4(OA_3)A_5$ sind

$$\left.\begin{matrix} x_1 = x_2 = x_3 \\ x_5 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 = x_2 = x_3 \\ x_4 = x_5 \end{matrix}\right\}$$

die Gleichungen der Ebenen OA_3A_4, OA_3A_5,

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{matrix}\right\}$$

die Gleichungen der senkrechten Räume α_{34}, α_{35} und

$[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0]$, $[x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 + x_5 = 0]$

Digitized by Google

die Gleichungen der Schnittgeraden dieser Räume mit dem Raume $x_1 = x_2 = x_3$ der beiden Ebenen. Man findet daher $A_4(OA_3)A_5 = \frac{\pi}{4}$ und erhält auf diese Weise die 30 in der Antwort zu Aufgabe 304 erwähnten Werte.

Handelt es sich um die Berechnung des Winkels $A_r(OA_pA_q)A_s$ der Räume $OA_pA_qA_r$ und $OA_pA_qA_s$, welche die Ebene OA_pA_q gemein haben und im vierdimensionalen Raume $OA_pA_qA_rA_s$ liegen, so bestimme man den Winkel zwischen den Schnittgeraden dieses Raumes R_4 mit den in O zu den Räumen $OA_pA_qA_r$ und $OA_pA_qA_s$ senkrechten Ebenen $\varepsilon_{p,q,r}$ und $\varepsilon_{p,q,s}$. Für den Fall des Winkels $A_4(OA_1A_2)A_5$ sind

$$[x_3 = x_4,\ x_5 = 0],\ [x_3 = x_4 = x_5]$$

die Gleichungen der Räume $OA_1A_2A_4$, $OA_1A_2A_5$,

$[x_1 = x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0]$, $[x_1 = x_2 = 0,\ x_3 + x_4 + x_5 = 0]$

die Gleichungen der senkrechten Ebenen ε_{124}, ε_{125} und

$[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0]$, $[x_1 = x_2 = 0,\ 2x_3 = 2x_4 = -x_5]$

die Gleichungen der Schnittgeraden dieser Ebenen mit dem vierdimensionalen Raume $x_1 = x_2$ der beiden Räume. Deshalb findet man $\cos A_4(OA_1A_2)A_5 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ und allgemein das in nachstehender Tabelle niedergelegte System von Cosinuswerten:

3(12)4	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	2(14)3	$\frac{1}{2}$	1(23)4	0	1(25)3	0	1(35)2	$\frac{1}{2}$
3(12)5	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2(14)5	0	1(23)5	0	1(25)4	0	1(35)4	0
4(12)5	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	3(14)5	0	4(23)5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	3(25)4	0	2(35)4	0
2(13)4	0	2(15)3	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1(24)3	0	1(34)2	$\frac{1}{2}$	1(45)2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
2(13)5	0	2(15)4	$\frac{1}{3}$	1(24)5	0	1(34)5	0	1(45)3	$\frac{1}{3}$
4(13)5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	3(15)4	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	3(24)5	0	2(34)5	0	2(45)3	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Digitized by Google

Will man den Winkel $A_s(OA_pA_qA_r)A_t$ berechnen, welchen die vierdimensionalen Räume $OA_pA_qA_rA_s$, $OA_pA_qA_rA_t$ durch den Raum $OA_pA_qA_r$ mit einander bilden, so bestimme man den Winkel zwischen den in O zu den beiden vierdimensionalen Räumen errichteten Loten. Für den Fall des Winkels $A_1(OA_3A_4A_5)A_2$ sind

$$x_2 = x_3,\ x_1 = x_2$$

die Gleichungen der vierdimensionalen Räume und

$[x_1 = x_4 = x_5 = 0,\ x_2 + x_3 = 0]$, $[x_1 + x_2 = 0, x_3 = x_4 = x_5 = 0]$

die Gleichungen der Lote, sodafs $\cos A_1(OA_3A_4A_5)A_2 = \frac{1}{2}$ wird. So findet man die zehn Cosinuswerte der folgenden Tabelle:

4 (123) 5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	2 (145) 3	$\frac{1}{2}$
3 (124) 5	0	1 (234) 5	0
3 (125) 4	$\frac{1}{2}$	1 (235) 4	0
2 (134) 5	0	1 (245) 3	0
2 (135) 4	0	1 (345) 2	$\frac{1}{2}$

Wir kommen jetzt zu den Winkeln zwischen den einander gegenüberliegenden Elementen, welche mit genügender Deutlichkeit durch die Symbole (1,2345) u. s. w. und (12, 345) gekennzeichnet werden, wobei dann jedes der fünf Symbole (1,2345) einen einzigen Winkel, jedes der zehn Symbole (12,345) zwei Winkel charakterisiert. Der Winkel (1,2345) zwischen der Kante OA_1 und dem vierdimensionalen Raume $OA_2A_3A_4A_5$ wird mit Hilfe seines von OA_1 und dem in O auf $OA_2A_3A_4A_5$ errichteten Lote OA_1' gebildeten Komplementes A_1OA_1' gefunden; es ergeben sich dabei die schon bei der Aufgabe 305 erwähnten Cosinuswerte. Und die beiden Winkel (12,345) sind[(50b)] die Komplemente der beiden Winkel, welche von der Ebene $OA_1A_2 = \varepsilon_{12}$ mit der in O zu $OA_3A_4A_5$ senkrechten Ebene ε_{12}' gebildet werden. Zur Vorbereitung dieser Rechenarbeit giebt die folgende Tabelle die Gleichungentripel der 20 Ebenen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}'$ und die Gleichungen der durch die 10 Paare $(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}')$ gehenden Räume R_4 oder R_3:

Digitized by Google

Fall (pq,rst)	Gleichungen von $\varepsilon_{p,q}$	Gleichungen von $\varepsilon'_{p,q}$	Raum R_4 oder R_3 durch $\varepsilon_{p,q}$, $\varepsilon'_{p,q}$
(12,345)	$x_3 = x_4 = x_5 = 0$	$x_4 = x_5 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$	$x_4 = x_5 = 0$
(13,245)	$x_4 = x_5 = 0$ $x_2 = x_3$	$x_5 = 0$ $x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0$	$x_5 = 0$
(14,235)	$x_5 = 0$ $x_2 = x_3 = x_4$	$x_3 = 0$ $x_1 + x_2 = 0, x_4 + x_5 = 0$	$x_3 - x_4 - x_5 = 0$
(15,234)	$x_2 = x_3 = x_4 = x_5$	$x_3 = x_4 = 0$ $x_1 + x_2 = 0$	$x_3 = x_4$
(23,145)	$x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = x_2$	$x_1 = x_5 = 0$ $x_2 + x_3 + x_4 = 0$	$x_5 = 0$
(24,135)	$x_5 = 0$ $x_1 = x_2, x_3 = x_4$	$x_1 = 0$ $x_2 + x_3 = 0, x_4 + x_5 = 0$	$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$
(25,134)	$x_1 = x_2, x_3 = x_4 = x_5$	$x_1 = x_4 = 0$ $x_2 + x_3 = 0$	$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$
(34,125)	$x_5 = 0$ $x_1 = x_2 = x_3$	$x_1 = x_2 = 0$ $x_3 + x_4 + x_5 = 0$	$x_1 = x_2$
(35,124)	$x_1 = x_2 = x_3, x_4 = x_5$	$x_1 = x_2 = 0$ $x_3 + x_4 = 0$	$x_1 = x_2$
(45,123)	$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$x_1 = x_2 = x_3$

Digitized by Google

Von diesen 10 Fällen (p, q) haben der dritte und vierte schon früher[96,10,11] ihre Erledigung gefunden; von den andern bemerken wir nur, dafs der sechste und siebente respektive durch die Transformationen

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &= y_1\sqrt{2}\\ x_3+x_4 &= y_2\sqrt{2}\\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &= 2y_3\\ x_1-x_2-x_3+x_4-4x_5 &= 2y_4\sqrt{5}\\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 &= y_5\sqrt{5}\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 2y_1\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 2y_2\\ x_1-x_2+x_3-x_4 &= 2y_3\\ -x_1+x_2+x_3-x_4 &= 2y_4\\ x_5 &= y_5\end{aligned}\right\}$$

auf die verlangte Form gebracht werden. So findet man für die Sinus der hier berechneten, d. h. für die Cosinus der gesuchten Winkel die Werte:

(12,345)	$\frac{1}{6}\sqrt{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$	(24,135)	$\frac{1}{4}\sqrt{2(5\pm\sqrt{5})}$
(13,245)	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$	(25,134)	$\frac{1}{12}\sqrt{6(15\pm\sqrt{33})}$
(14,235)	$\frac{1}{6}\sqrt{3(7\pm\sqrt{13})}$	(34,125)	$\frac{1}{3}\sqrt{5\pm\sqrt{7}}$
(15,234)	$\frac{1}{4}\sqrt{9\pm\sqrt{17}}$	(35,124)	$\frac{1}{12}\sqrt{6(13\pm\sqrt{73})}$
(23,145)	$\frac{1}{6}\sqrt{6\pm\sqrt{3}}$	(45,123)	$\frac{1}{4}\sqrt{3}\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}$

Wie man sieht, sind nur zwei von den 20 Winkeln rechte, nämlich ein Winkel des ersten und ein Winkel des letzten Falles.

Mit dieser ziemlich vollständigen Behandlung eines bestimmten Fünfkants brechen wir unsere Betrachtungen über Vielkante ab. Es sind hiermit dann auch ebenfalls unsere Entwickelungen über lineare Gebilde überhaupt zu Ende.

Indem wir den ersten Teil dieses Lehrbuchs mit einer Reihe gemischter Aufgaben schliefsen, werden im zweiten zunächst die von den linearen Gebilden eingeschlossenen „Polytope“ besprochen werden.

Digitized by Google

Anhang.

Gemischte Aufgaben.

Aufgabe 308. In Aufgabe 10 ist die Zahl der Ebenen des Raumes mittels des Prinzips der Dualität aus der Zahl der Punkte des Raumes abgeleitet. Zeige, dafs man die erstere Zahl auch wohl ohne Anwendung dieses Prinzips erhalten kann.

[Man teile die Zahl der nicht in einer Gerade liegenden Punktetripel der Ebene in die Zahl der nicht in einer Gerade liegenden Punktetripel des Raumes; d. h. man hat mit Ersetzung von $A_{(n,p)}$ aus Aufgabe 215 durch A_p^n

$$A_2^3 = \frac{A_0^3 (A_0^3 - 1)(A_0^3 - 2) - A_0^1 (A_0^1 - 1)(A_0^1 - 2) A_1^3}{A_0^2 (A_0^2 - 1)(A_0^2 - 2) - A_0^1 (A_0^1 - 1)(A_0^1 - 2) A_1^2}.]$$

Aufgabe 309. Wie grofs ist im Sinne von Nr. 9 die Zahl der Bestimmungsweisen der Räume R_9 und R_{10}?

[Man findet 40 und 54.]

Aufgabe 310. Wende die Formel 9) an auf den Fall, dafs ein Simplex $S(n+1)$ gegeben vorliegt und man die Kanten dieses Simplex als gegebene Räume $\overline{R}_2$ betrachtet.

[Man findet

$$w = (n+1)\{(n)_1 - (n)_2 + (n)_3 - \ldots + (-1)^{n-1}(n)_n\}, \text{ u.s.w.}]$$

Aufgabe 311. Von je zwei aus n Ebenen ist irgend eine Gerade der einen senkrecht zu irgend einer Gerade der andern. Welche ist die Minimumzahl der Dimensionen des Raumes, welcher diese Ebenen enthalten kann?

Digitized by Google

Aufgabe 312. Zeige, dafs die bei der Lösung der Aufgabe 79 betrachteten Ebenen $A''B''C'D''$ allemal dem zu den Ebenen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ parallelen Raume R_4 parallel sind.

Aufgabe 313. Das Rechteck, dessen Eckpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} im R_4 die Koordinaten eines Punktes P sind, wird derart parallel zu sich selbst verschoben, dafs jeder Eckpunkt in der Bildebene (Fig. 20) einen Kreis mit dem Radius r beschreibt. Zeige, dafs auch der Punkt P unter diesen Umständen einen Kreis durchläuft und berechne den Radius ϱ dieses Kreises.

[Man findet $\varrho = r\sqrt{2}$.]

Aufgabe 314. Zeige, dafs die vier Projektionen P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} eines Punktes P im R_4 stets die vier Spuren E, F, G, H einer Ebene ε sind und es eine vierfache unendliche Anzahl solcher Ebenen giebt.

[Durch die vier Spuren gehen zwei Räume $K_\infty L M_\infty N$, $K L_\infty M N_\infty$ hindurch; die Ebene ε ist also zu den ungebräuchlichen Projektionsebenen $O(X_1 X_3)$ und $O(X_2 X_4)$ halb parallel und halb normal.]

Aufgabe 315. Die vier Eckpunkte eines Rechtecks, dessen Seiten den Achsen $X_1 O X_3$ und $X_2 O X_4$ eines Achsenkreuzes im R_4 parallel sind, sind die Projektionen von vier verschiedenen Punkten. Zeige, dafs diese Punkte die Eckpunkte eines Rechtecks sind und der Mittelpunkt dieses Rechtecks eine Ebene erzeugt, wenn das gegebene Rechteck auf alle mögliche Weisen in der Bildebene parallel zu sich selbst verschoben wird.

[Die Ebene ist $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$.]

Aufgabe 316. Es bilden die vier Projektionen g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{41} einer Gerade g im R_4 einen Rhombus, dessen Diagonalen mit den Achsen des Achsenkreuzes zusammenfallen. Beweise, dafs die Ebene (O, g) eine ganz bestimmte Ebene ist und berechne die Winkel, welche diese Ebene mit den Projektionsebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_2 X_3)$, $O(X_3 X_4)$, $O(X_4 X_1)$ bildet.

[Die acht Winkel sind 45^0.]

Digitized by Google

Aufgabe 317. Von einer Gerade g im R_4 (Fig. 47) sind die Projektionen g_{23} und g_{34} gegeben. Man fragt die Projektion g_{12} dieser Gerade so zu konstruieren, dafs die Ebene (O, g) mit der Projektionsebene $O(X_1 X_2)$ zwei gleiche Winkel bildet.

[Man findet leicht, dafs die Punkte O'_{12} und P_{12} auf den zu OX_1 parallelen Geraden der Figur so gewählt werden müssen, dafs das Dreieck $O O'_{12} P_{12}$ in und um O'_{12} rechtwinklig gleichschenklig wird, was auf zwei verschiedene Arten geschehen kann. Aus der Betrachtung der durch die Punkte O'_{12} und P_{12} beschriebenen ähnlichen Punktfelder mit dem Doppelpunkte O erscheint dabei dann der Punkt P_{12} als Schnittpunkt der zu OX_1 parallelen Gerade mit einer bestimmten, im einen oder im andern Sinne unter 45^0 zu ihr geneigten Gerade.]

Aufgabe 318. Beweise, dafs man im allgemeinen $n-1$ Drehungen von Projektionsebenen in sich braucht um ein im R_n gegebenes rechtwinkliges Achsensystem so zu transformieren, dafs irgend eine gegebene Gerade OP durch O Achse wird.

[Nennt man die gesuchte Drehungenzahl ϱ_n, so findet man die Beziehung $\varrho_n = \varrho_{n-1} + 1$ mit der Bedingung $\varrho_2 = 1$. Ist nämlich OP' die Schnittgerade der Ebene $O(X_n P)$ mit dem Raume $R_{n-1} = O(X_1 X_2 \ldots X_{n-1})$, so braucht man neben den ϱ_{n-1} Drehungen, welche $O(X_1 X_2 \ldots X_{n-1})$ in diesem R_{n-1} zu einem Achsensysteme $O(P' \ldots)$ umbilden, nur noch die Drehung in der Ebene $O(X_n P')$, welche OP' in OP überführt.]

Aufgabe 319. Beweise, dafs man im R_n von einem gegebenen rechtwinkligen Achsensysteme $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ zu irgend einem andern rechtwinkligen Achsensysteme mit dem nämlichen Ursprunge übergehen kann mit Hilfe von $\frac{1}{2} n (n-1)$ Drehungen von Projektionsebenen in sich.

[Nennt man die gesuchte Drehungenzahl σ_n, so hat man, vergleiche Aufgabe 318, $\sigma_n = \varrho_n + \varrho_{n-1} + \cdots + \varrho + 1$.

Hierin besteht die Verallgemeinerung der bekannten Euler'schen Transformation; weil $\frac{1}{2} n (n-1) < 2^{n-1} - 1$ ist

Digitized by Google

für $n > 3$, ist diese Transformation also einfacher als jene der Aufgabe 149.]

Aufgabe 320. Wie beweist man die Umkehrung des ersten Satzes der Nr. 80?

Aufgabe 321. Weshalb wurde bei der Definition des homogenen Abstandskoordinatensystems(80a) angegeben, dafs der von allen Seitenräumen $R^{(i)}_{n-1}$ des Koordinatensimplex gleich weit entfernte Einheitspunkt *innerhalb* des Simplex liegen soll?

Aufgabe 322. Zeige, dafs die Winkel der durch die auf rechtwinkligen Achsen bezogenen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_4 + b_1 x_5 + c_1 x_6 \\ x_2 &= a_2 x_4 + b_2 x_5 + c_2 x_6 \\ x_3 &= a_3 x_4 + b_3 x_5 + c_3 x_6 \end{aligned}\right\}$$

dargestellten Räume R_3, R'_3 vom R_6 durch die Gleichung

$$z^3 - (\Sigma a_i^2 + \Sigma b_i^2 + \Sigma c_i^2) z^2 + (\Sigma \alpha_i^2 + \Sigma \beta_i^2 + \Sigma \gamma_i^2) z - \Delta^2 = 0$$

bestimmt werden, wo Δ die Determinante der neun Koeffizienten a_i, b_i, c_i, und α_i, β_i, γ_i die Minoren dieser Determinante nach a_i, b_i, c_i bedeuten, und z für $\tan g^2 \varphi$ steht.

Aufgabe 323. Ist bei den Sternen $\Sigma_{p,q}$ der Nr. 100 der erste Index p nicht immer gröfser als der zweite Index q?

[Nein; die Indices sind einander gleich, wenn der Kern des Sternes ein Punkt ist und der zweite Index ist sogar um die Einheit gröfser als der erstere, wenn man es wie bei $\Sigma_{m,m+1}$ mit der Darstellung aller in einem R_{m+1} enthaltenen Räume R_m zu thun hat.]

Aufgabe 324. Wieviel Zwischenglieder hat nach den Nummern 101 und 107 die Kette von perspektiven Nachbarsystemen, von welcher zwei in zu einander windschiefen Räumen R_m, R'_m liegende kollinear verwandte Systeme C_m, C'_m die Endglieder sind?

[Man findet die Anzahl $3m + 2$. Ausdrücklich sei bemerkt, dafs man das gesteckte Ziel im allgemeinen zwar mit Hilfe einer viel kürzeren Kette wird erreichen können, dafs wir der Ableitung dieses Minimumweges aber die Anweisung eines leicht angebbaren theoretischen Verfahrens vorgezogen haben.]

Digitized by Google

Aufgabe 325. Im R_n ist ein Simplex $S(n+1)$ gegeben. Beweise, dafs die Anzahl der verschiedenen Paare involutorisch gescharter Systeme, welche dieses Simplex zum Hauptsimplex haben, im ganzen $2^n - 1$ beträgt.

Aufgabe 326. Wie heifst die mehrdimensionale Ausdehnung des Satzes der ebenen Geometrie der Lage „zwei projektive Punktreihen, welche den Schnittpunkt ihrer geraden Träger entsprechend gemein haben, liegen perspektiv"?

[Es bildet dieser Satz den Schlufsstein der letzten Beweisführung der Nr. 107; wie wird er formuliert?]

Aufgabe 327. Ist die Erwähnung des ersten Satzes der Nr. 108 nicht im Widerspruch mit der Schlufsperiode der Nr. 103?

[Nein; denn am Schlusse der Nr. 103 ist nur gemeint, dafs der dem früher(101$_{8,9}$) gegebenen analytischen Beweise nachgebildete Beweis unterdrückt werden soll.]

Aufgabe 328. Bildet der zweite Satz der Nr. 108 die einzige duale Umbildung des zweiten Satzes der Nr. 101?

[Wendet man auf die im Operationsraume R_n liegenden Räume R_m, R'_m im R_n irgend eine Orthogonalitätsverwandtschaft an, so findet man:

„Werden die Sterne $\Sigma^{(1)}_{n-1,m-1}$, $\Sigma^{(2)}_{n-1,m-1}$ eines $\Sigma_{n-1,m}$ derart kollinear bezogen auf die Sterne $\Sigma'^{(1)}_{n-1,m-1}$, $\Sigma'^{(2)}_{n-1,m-1}$ eines $\Sigma'_{n-1,m}$, dafs die Verwandtschaften $W_1 = [\Sigma^{(1)}_{n-1,m-1}, \Sigma'^{(1)}_{n-1,m-1}]$ und $W_2 = [\Sigma^{(2)}_{n-1,m-1}, \Sigma^{(2)}_{n-1,m-1}]$ in dem gemeinschaftlichen Gebiete die nämliche Verwandtschaft $W_{1,2} = [\Sigma^{(1,2)}_{n-1,m-2}, \Sigma'^{(1,2)}_{n-1,m-2}]$ hervorrufen, so ist hiermit zu gleicher Zeit eine kollineare Verwandtschaft W zwischen den Sternen $\Sigma_{n-1,m}$, $\Sigma'_{n-1,m}$ erzeugt."]

Aufgabe 329. Kann man(111$_1$) zwei Punkte auch konjugiert imaginär nennen, wenn ihre in Bezug auf irgend ein Simplex $S(n+1)$ gegebenen homogenen Koordinaten konjugiert imaginär sind?

Aufgabe 330. Auf zwei im R_n gegebene reciproke Systeme $S_{0,m}$, $\Sigma_{m-1,m}$ mit gemeinschaftlichem Träger wendet man die nämliche Orthogonalitätstransformation an; wie werden die zwei neuen Systeme sich zu einander verhalten?

Digitized by Google

[Es leuchtet sofort ein[100a], dafs man zwei reciproke Sterne $\Sigma_{n-1,m}$, $S_{n-m,m}$ mit gemeinschaftlichem Kerne R_{n-m-1} erhält.]

Aufgabe 331. Beweise, dafs es im R_4 fünf Geraden giebt, welche sechs willkürlich gegebene Ebenen schneiden, und dafs diese fünf Geraden einander im Segre'schen Sinne der Aufgabe 197 zugeordnet sind.

[Ersetzt man die sechs willkürlichen Ebenen durch drei Paare $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $(\varepsilon_5, \varepsilon_6)$ von Ebenen durch eine Gerade, und sind g_{12}, g_{34}, g_{56} die Achsen dieser Ebenenpaare, r_{12}, r_{34}, r_{56} die sie enthaltenden dreidimensionalen Räume, so werden die fünf Lösungen durch die Symbole

$$l = (g_{12}\, g_{34}\, g_{56}),\ l_{12} = (r_{12}\, g_{34}\, g_{56}),\ l_{34} = (g_{12}\, r_{34}\, g_{56}),$$
$$l_{56} = (g_{12}\, g_{34}\, r_{56}),\ l' = (r_{12}\, r_{34}\, r_{56})$$

gekennzeichnet. Da nun jede Ebene ε, welche vier gegebenen Geraden begegnet, immer eine durch diese vier Geraden bestimmte fünfte Gerade schneidet, so sind die fünf Lösungen fünf einander im Sinne der Aufgabe 197) zugeordnete Geraden.

Betrachtet man den Doppelvier

$$\left|\begin{array}{cccc} l, & l_{12}, & l_{34}, & l_{56} \\ g, & g_{12}, & g_{34}, & g_{56} \end{array}\right|$$

des besonderen Falles, wo g die gemeinschaftliche Transversale von l_{12}, l_{34}, l_{56} ist, so ergiebt sich unmittelbar, dafs die Räume $(l_{12}\, g_{12}) = r_{12}$, $(l_{34}\, g_{34}) = r_{34}$, $(l_{56}\, g_{56}) = r_{56}$ einander in der fünften Gerade $l' = (r_{12}\, r_{34}\, r_{56})$ schneiden.]

Aufgabe 332. Im Raume R_{2n-1} sind ein Raum R_{n-1} und $n+1$ Geraden willkürlich gewählt worden. Beweise, dafs es n Räume R_{n-1} giebt, welche mit jedem dieser $n+2$ gegebenen Gebilde einen Punkt gemein haben.

[Man betrachte den speziellen Fall, wo eine der gegebenen Geraden, z. B. g_1, den gegebenen Raum R_{n-1} in einem Punkte P schneide und erhält dann sofort[97d] eine Lösung, bei welcher dieser Punkt P der Schnittpunkt der Gerade g_1 mit dem zu bestimmenden Raume R_{n-1} ist. Dann projiziere man die ganze Figur mit irgend einem

Digitized by Google

andern der Fragestellung Genüge leistenden Raume R_{n-1} aus g_1 auf irgend einen zu dieser Gerade windschiefen Raum R_{2n-3} im R_{2n-1}, woraus sich schliefsen läfst, dafs die übrigen gesuchten Räume R_{n-1} sich projizieren als Räume R_{n-2}, welche in diesem R_{2n-3} mit einem Raume R_{n-2} und mit jeder von n gegebenen Geraden einen Punkt gemein haben; d. h. wenn $f(2n-1)$ die gesuchte Zahl angiebt, so gilt die Beziehung $f(2n-1) = 1 + f(2n-3)$. Weil bekanntlich $f(3) = 2$ ist, so findet man $f(2n-1) = n$.

Wir bemerken hier noch, dafs der Ort der auf $n+1$ willkürlich im R_{2n-1} angenommenen Geraden ruhenden Räume R_{n-1} eine Varietät V_n^n n^{ter} Ordnung von n Dimensionen ist und dieses Gebilde wieder[104₁₈] eine doppelte Erzeugung zuläfst, indem es sowohl als Ort der Räume R_{n-1} durch die sich entsprechenden Punkte von n projektiven Punktreihen wie als Ort der Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Punkte zweier projektiver Räume R_{n-1} erscheinen kann.]

Aufgabe 333. In einem Raume $R_{(p+1)(q+1)}$ sind $p+1$ Räume R_p und eine Gerade g willkürlich gegeben. Zu beweisen, dafs es einen einzigen Raum R_q giebt, welcher mit diesen $q+2$ Gebilden incident ist.

[Bezeichnet man die $q+1$ gegebenen Räume R_p als R_p^k, $(k = 1, 2, .., q+1)$ und ebenso die durch g und q der Räume R_p bestimmten Räume R_{pq+q+1} als $R_{pq+q+1}^{(k)}$, wo $R_{pq+q+1}^{(k)}$ alle Räume $R_p^{(l)}$ mit von k verschiedenem Index l enthält, so sieht man sofort ein, dafs jeder den Bedingungen des Problems Genüge leistende Raum R_q in den $q+1$ Räumen $R_{pq+q+1}^{(k)}$ liegen mufs, weil $q+1$ von einander unabhängige und deshalb diesen R_q bestimmende Punkte es thun. Deshalb mufs weiter jeder dieser gesuchten Räume R_q die $q+1$ Schnittpunkte $P^{(k)} = (R_{pq+q+1}^{(k)}, R_p^{(k)})$ der Räume R_{pq+q+1}, R_p mit gleichem Index k, $(k = 1, 2, .., q+1)$ enthalten, und kann es also in Folge der Unabhängigkeit dieser $q+1$ Punkte $P^{(k)}$ höchstens einen Raum R_q der verlangten Beschaffenheit geben. Und nun zeigt man leicht mit Hilfe der ersten Entwickelungen der Nr. 103, dafs die $q+1$ Punkte $P^{(k)}$ wirklich einen Raum R_q bestimmen, welcher mit g einen Punkt gemein hat, indem man die in

Digitized by Google

Rede stehende Figur aus irgend einem Punkte P der Gerade g auf irgend einen nicht durch P hindurchgehenden Raum R_{pq+p+q} von $R_{(p+1)(q+1)}$ projiziert, u. s. w.]

Aufgabe 334. In einem Raume $R_{(p+1)(q+1)}$ sind $q+2$ Räume R_p so gegeben, dafs irgend $q+1$ aus ihnen einen Raum R_{pq+p+q} bestimmen. Zu zeigen, dafs die mit diesen $q+2$ Räumen R_p incidenten Räume R_q jeden der $q+2$ gegebenen Räume R_p in den Punkten eines Raumes R_{p-1} schneiden.

[Der Ort der Punkte $P^{(k)}$, welche die mit den $q+2$ Räumen R_p incidenten Räume R_q in $R_p^{(k)}$ bestimmen, hat — vergleiche die vorhergehende Aufgabe — die Eigenschaft mit irgend einer Gerade g von $R_p^{(k)}$ einen Punkt gemein zu haben, u. s. w.]

Aufgabe 335. Der Ort der Räume R_q, welche im R_{pq+p+q} zu $q+2$ willkürlich gegebenen Räumen R_p incident sind, ist — vergleiche Aufgabe 225 — eine Varietät $V_{p+q}^{(p+q)q}$ von der Ordnung $(p+q)_q$ und der Dimensionenzahl $p+q$. Man wünscht den Beweis.

[Die Entwickelungen der Nr. 103 enthalten schon den Schlufs, dafs der gemeinschaftliche Ort der incidenten Systeme $(R_p)_q$ und $(R_q)_p$ eine Dimensionenzahl $p+q$ hat; deshalb mufs nur noch gezeigt werden, dafs es im R_{pq+p+q} eine Anzahl von $(p+q)_q$ Räumen R_q giebt, welche zu den $q+2$ gegebenen Räumen R_p und irgend einem willkürlich im R_{pq+p+q} gewählten Raume $R_{pq+p+q-(p+q)=pq}$ incident sind.

Dieser ergänzende Beweis wird leicht geliefert, nachdem mit Hilfe des Prinzips der Erhaltung der Anzahl gezeigt worden ist, dafs die gesuchte Anzahl $f(p, q)$ die funktionelle Beziehung

$$f(p, q) = f(p, q-1) + f(p-1, q)$$

der Binomialkoeffizienten befriedigt. Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dafs $q+1$ von den $q+2$ Räumen $R_p^{(k)}$ — z. B. alle mit Ausnahme von $R_p^{(q+2)}$ — in einem Raume R_{pq+q} liegen und P der Schnittpunkt dieses Raumes R_{pq+q} mit $R_p^{(q+2)}$ sei. Dann wird es zwei verschiedene

Digitized by Google

Arten von Lösungen R_q geben können, indem es möglich ist, dafs die $q+1$ Punkte, in welchen sich R_q auf den Räumen $R_p^{(k)}$, $(k=1,2,..,q+1)$ stützt, 1° ganz unabhängig von einander sind, oder 2° in einem Raume R_{q-1} liegen. Und nun ergiebt sich, dafs $f(p,q-1)$ und $f(p-1,q)$ der Reihe nach die Anzahl der Lösungen R_q von beiden Gruppen angeben. Weil jeder Raum R_q der ersten Gruppe im Raume R_{pq+q} liegt, mufs er durch P hindurchgehen, damit er einen Punkt mit R_q^{q+2} gemein habe; deshalb hat man die vorliegende Figur nur aus P auf irgend einen den Punkt P nicht enthaltenden Raum R_{pq+q-1} von R_{pq+q} zu projizieren, um einzusehen, dafs jeder Raum R_q der ersten Gruppe zu einem R_{q-1} führt, welcher im R_{pq+q-1} incident ist zu $q+1$ Räumen R_p und einem Raume $R_{p(q-1)}$, und die Anzahl der Räume R_q dieser Gruppe also $f(p,q-1)$ ist. Und irgend ein Raum R_q der zweiten Gruppe schneidet R_{pq+q} in einem R_{q-1}, welcher mit $q+1$ Räumen R_p von R_{pq+q} — und also nach der vorhergehenden Aufgabe mit $q+1$ bestimmten Räumen R_{p-1} von R_{pq+q} — einen Punkt gemein hat; deshalb transformiert die Projektion der Figur aus P auf irgend einen nicht durch diesen Punkt gehenden Raum R_{pq+p-1} von $R_{(p+1)(q+1)}$, welcher R_{pq} in einem $R_{(p-1)q}$ schneidet, jeden Raum R_q der zweiten Gruppe in einen R_q, welcher im R_{pq+p-1} zu jedem von $q+2$ Räumen R_{p-1} und einem $R_{(p-1)q}$ incident ist, d. h. die Anzahl der Räume R_q der zweiten Gruppe ist $f(p-1,q)$, u. s. w.

Nun hat man, weil $f(p,1)=p+1$ ist,

$$f(p,2)=(p+1)+f(p-1,2)=(p+1)+p+f(p-2,2)=....$$
$$=(p+1)+p+(p-1)+...+\ 4+3+3=\ (p+1)_2$$

und so weitergehend findet man allgemein, wie Segre a. a. O.[103d] angegeben hat,

$$f(p,q)=(p+q)_q.]$$

Digitized by Google

Herrosé & Ziemsen, Wittenberg.

Digitized by Google

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Soeben erschien:

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis broschiert Mk. 6.—, gebunden M. 6.60.

II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis broschiert Mk. 10.—, gebunden Mk. 10.80.

III. (Schluss-) Band im Druck.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar" ist dabei so zu nehmen, dass die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, giebt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmässig und wird somit an Vielseitigkeit und Gediegenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.

Ausführliche Prospekte unberechnet und postfrei.

Digitized by Google

G. J. Göschensche Verlagshandlung in Leipzig.

Soeben erschien:

Theorie

des

Schlick'schen Massenausgleichs

bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen

Von

Prof. Dr. Hermann Schubert

in Hamburg.

Lexikon-8°. — Broschiert 12 M.

Inhalts-Verzeichnis.

1. Abschnitt: **Grundlagen.** Aufstellung der acht Grundgleichungen. — Bedeutung der acht Grundgleichungen. — Forderungen der Praxis. — Primäre vertikale Ausgleichung (Verschwinden der primären vertikalen Kräfte).
2. Abschnitt: **Die Schlicksche Ausgleichung** (Verschwinden der primären vertikalen und der primären kippenden Kräfte). — Abhängigkeit der Cylinderreihenfolge von der Kurbelreihenfolge bei vierkurbeligen Maschinen. — Perspektive Lage des Abstandsdiagramms und des Kurbeldiagramms. — Auffindung der drei Gewichtsverhältnisse aus den Kurbelwinkeln und den Abständen. — Relation zwischen den Abständen und den Gewichten. — Rechnerische und graphische Bestimmung der Kurbelwinkel aus den Abständen und den Gewichten. — Symmetrie in dreierlei Hinsicht. — Mehr als vier Kurbeln.
3. Abschnitt: **Völlige vertikale Ausgleichung** (Verschwinden der primären vertikalen und der sekundären vertikalen Kräfte). — Symmetrie der Kurbelwinkel und der Gewichte bei drei und bei vier Cylindern. — Die Relation zwischen den Kurbelwinkeln bei vier Kurbeln im Fall der Nicht-Symmetrie. — Berechnung der Gewichtsverhältnisse aus den Kurbelwinkeln. — Symmetrie bei fünf Kurbeln.
4. Abschnitt: **Die verbesserte Schlicksche Ausgleichung** (Verschwinden der primären vertikalen, der primären kippenden und der sekundären vertikalen Kräfte). — Die vierkurbelige Maschine ohne Symmetrie. — Beweis, dass bei der verbesserten Schlickschen Ausgleichung Symmetrie in der Cylinderstellung Symmetrie in den Kurbelwinkeln zur Folge hat — Die symmetrische vierkubelige Maschine. — Die symmetrische fünfkurbelige Maschine.
5. Abschnitt: **Die völlige Ausgleichung** (Verschwinden der primären vertikalen, der primären kippenden, der sekundären vertikalen und der sekundären kippenden Kräfte). — Unmöglichkeit der völligen Ausgleichung bei nur vier Kurbeln. — Unmöglichkeit der völligen Ausgleichung bei nur fünf Kurbeln, falls keine Kurbel einer anderen parallel sein darf. — Völlige Ausgleichung bei nur fünf Kurbeln, falls parallele Kurbelstellung gestattet ist. — Die völlig ausgeglichene und zugleich symmetrische sechskurbelige Maschine ohne parallele Kurbeln.
6. Abschnitt: **Die Verbreitung des Schlickschen Massen-Ausgleichs.** — Maasse der Maschinen des Dampfers „Deutschland". — Verzeichnis der bis September 1899 in Deutschland erbauten Dampfer mit Maschinen nach dem Schlickschen System. — Verzeichnis der bis September 1899 in England erbauten Dampfer mit Maschinen nach dem Schlickschen System.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOUND

JUN 19 1945

UNIV. OF MICH.
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google